Las desigualdades isoperimétrica y de Wirtinger

Demostraremos la equivalencia entre las dos desigualdades del título. La desigualdad isoperimétrica (DI) nos dice que si A es el área interior a una curva cerrada y simple de longitud L, entonces $L^2 \geq 4\pi A$. Por otro lado la desigualdad de Wirtinger (DW) para funciones f de clase $\mathcal{C}^1$ cumpliendo $f(0) = f(2\pi)$ nos asegura que

$$W(f) = \int_0^{2\pi} \big(f(t) - \bar{f}\big)^2 \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 \mathrm{d}t \leq 0, \quad \text{donde} \quad \bar{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

DW $\Rightarrow$ DI: Tomemos una curva $\mathcal{C}^1$ cerrada y simple de longitud L, en coordenadas cartesianas y parametrizada por el parámetro arco, $(x, y) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$. Si definimos la nueva parametrización $(x, y) = \big(x(Lt/(2\pi)), y(Lt/(2\pi))\big) =: (f(t), g(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces $(f'(t))^2 + (g'(t))^2 \equiv (L/(2\pi))^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^{2\pi} 2f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2\big(f(t) - \bar{f}\,\big)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{\leq} \int_0^{2\pi} \big(f(t) - \bar{f}\,\big)^2 \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} (g'(t))^2 \mathrm{d}t \overset{(2)}{\leq} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} (g'(t))^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \big((f'(t))^2 + (g'(t))^2\big) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2 \mathrm{d}t = \frac{L^2}{2\pi}, \end{aligned}$$

donde en (1) hemos usado que $2ab \leq a^2 + b^2$ y en (2) la desigualdad de Wirtinger.

DI $\Rightarrow$ DW: Para curvas $\mathcal{C}^1$ expresables en coordenadas polares $r = h(t) > 0$, con $t \in [0, 2\pi]$, la DI se escribe como

$$I(h) = \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{(h(t))^2 + (h'(t))^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2 - 2\pi \int_0^{2\pi} (h(t))^2 \mathrm{d}t = L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Tomemos $h(t) = 1 + \varepsilon f(t)$, siendo ε un parámetro pequeño. Entonces $I(1 + \varepsilon f) \geq 0$. Usando que $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + O(u^3)$, haciendo las respectivas series de Taylor en $\varepsilon = 0$ e integrando, después de unos cuantos cálculos, obtenemos que $0 \leq I(h) = I(1 + \varepsilon f) = -2\pi W(f)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ y como consecuencia que $W(f) \leq 0$.

Prueba de DW: Escribimos f en serie de Fourier $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, con $A_{-n} = \overline{A}_n \in \mathbb{C}$. Entonces, usando dos veces la identidad de Parseval,

$$W(f) = 4\pi \textstyle\sum_{n\geq 1} |A_n|^2 - 4\pi \sum_{n\geq 1} n^2 |A_n|^2 = 4\pi\Big(\sum_{n\geq 1} (1 - n^2)|A_n|^2\Big) \leq 0.$$

Observación: $W(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = a + b\sin t + c\cos t$ y $I(h) = 0 \Leftrightarrow h$ es constante.

Una prueba bonita, directa y simple de la DI puede verse en «A short path to the shortest path» (*Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 158–159) de Peter D. Lax.

Armengol Gasull, Dep. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona y CRM
Correo electrónico: `armengol.gasull@uab.cat`