Fórmulas de integración de tipo Laisant

Sea (a,b) un intervalo en el que la función real f es invertible. Usando que

$$\int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

obtenemos la familia de fórmulas de integración

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g\big(f^{-1}(y)\big)\,\mathrm{d}y = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

simplemente haciendo el cambio de variable $x = f^{-1}(y)$ en la integral de la izquierda en (1). Esta segunda igualdad esconde un par de resultados interesantes:

(i) Tomando $g(x) = x$, $b = f^{-1}(t)$ y F tal que $F'(x) = f(x)$ en (2), llegamos a

$$\int_{f(a)}^{t} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = tf^{-1}(t) - F\big(f^{-1}(t)\big) + K_a,$$

donde K_a no depende de t. Esta fórmula es conocida como *fórmula de Laisant*, en honor al matemático francés Charles-Ange Laisant que la demostró en 1905. Nos proporciona las primitivas de la inversa de f en términos de una primitiva de f. Por ejemplo, $y\arccos(y) - \sin(\arccos(y)) + K$ son las primitivas de $\arccos(y)$, o $y\ln(y) - \exp(\ln(y)) + K = y\ln(y) - y + K$ las de $\ln(y)$. También funciona para buscar las primitivas de inversas de funciones holomorfas.

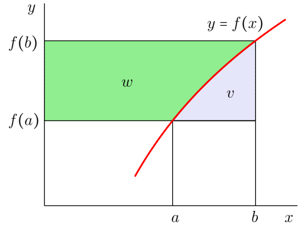
(ii) Considerando $g(x) = \pi x^2$ en (2) obtenemos

$$\pi\int_{f(a)}^{f(b)} \big(f^{-1}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y = \pi x^2 f(x)\Big|_a^b - 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es fácil ver que esta fórmula es equivalente a $V + W = \pi b^2\big(f(b) - f(a)\big)$, donde

$$V = 2\pi\int_a^b x\big(f(x) - f(a)\big)\,\mathrm{d}x, \quad W = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} \big(f^{-1}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y.$$

Estos valores son respectivamente los volúmenes de revolución obtenidos al hacer girar las superficies v y w de la figura respecto al eje Oy. El valor $\pi b^2\big(f(b) - f(a)\big)$ es el volumen del cilindro que se obtiene girando el rectángulo $v \cup w$. La igualdad demostrada proporciona la equivalencia entre las dos maneras de calcular volúmenes de revolución respecto al eje Oy.



Armengol Gasull, Dep. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona y CRM.
Correo electrónico: `gasull@mat.uab.cat`