

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNS PROBLEMES RESTRINGITS DE 3 ó 4 COSSOS

Concepció Pinyol i Pérez

Memoria presentada per a aspirar al grau
de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Setembre del 1987.

INDEX

INTRODUCCIÓ	1
Capítol I. DEFINICIONS PREVIES. PROBLEMA DE 2 COSSOS.	
(I. 1) Sistemes Hamiltonians	7
(I. 2) Òrbites de col.lisió, ejecció, parabòliques, hiperbòliques i el.líptiques... 10	
(I. 3) Problema de 2 cossos.....	12
Capítol II. PROBLEMES RESTRINGITS DE 3 COSSOS	
(II. 1) Problema restringit el.líptic espacial de 3 cossos.....	15
(II. 2) Casos particulars de problemes restringits: Circular espacial, el.líptic pla, i circular pla.....	19
(II. 3) Equacions del moviment regularitzant la singularitat de l'origen	22
Capítol III. PROBLEMES INTEGRABLES A LA FRONTERA DEL PROBLEMA RESTRINGIT EL.LIPTIC ESPACIAL I PLA DE 3 COSSOS, CAS $\mu=0$.	
Part (A) El.líptic espacial.	
(III. 1) Topologia dels conjunts I_{cmk}	26
(III. 2) Òrbites de col.lisió i ejecció. Varietat de col.lisió.....	39
(III. 3) Òrbites parabòliques i hiperbòliques. Varietat de l'infinit.....	48
Part (B) El.líptic pla.	
(III. 4) Topologia dels conjunts I_{cm}	56
(III. 5) Òrbites de col.lisió-ejecció. Varietat de col.lisió.....	58
(III. 6) Òrbites parabòliques i hiperbòliques. Varietat de l'infinit.....	62
Capítol IV. ÒRBITES DE COL.LISIO I EJECCIO EN EL PROBLEMA RESTRINGIT DE 3 COSSOS.	
(IV. 1) Òrbites de col.lisió i d'ejecció.....	62
(IV. 2) Òrbites d'ejecció-col.lisió en el problema restringit el.líptic pla de 3 cossos.....	69

(IV.3) Òrbites d'ejecció-col.lisió en el problema restringit circular i pla de 3 cossos.....	73
(IV.4) Transversalitat analítica de les òrbites d'ejecció-col.lisió en el problema restringit circular i pla de 3 cossos.....	80

CAPITOL V UNA APROXIMACIÓ GRAVITACIONAL A LA LLEI DE TITIUS-BODE.

(V.1) Introducció	94
(V.2) El model. Equacions del moviment.....	96
(V.3) Família \mathcal{L} per $\mu = n_G = 0$	105
(V.4) Transformacions canòniques. Variables de Poincaré.....	109
(V.5) Òrbites periòdiques de primera espècie pel model no autònom.....	117
(V.6) Conclusions.....	120

REFERENCIES.....	128
-------------------------	------------

Introducció

A l'espai euclidi de dimensió 3, el moviment de n punts materials P_1, P_2, \dots, P_n , de masses m_1, m_2, \dots, m_n sotmesos a les seves forces de gravitació newtoniana (en un sistema d'unitats convenient) vé donat pel sistema d'equacions diferencials:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_k}{dt^2} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} m_i \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|^3}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

on \mathbf{x}_k és el vector posició del punt P_k i $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|$ és la distància euclídea entre els punts P_i i P_k . L'estudi d'aquest sistema d'equacions diferencials es coneix com el problema de n -cossos.

Les solucions del problema de n -cossos són conegudes explícitament quan $n=2$ (veure Secció (1.3)), en canvi disten molt de ser-ho quan $n \geq 3$. Així la gran dificultat d'estudiar el problema de 3 cossos fa que es considerin els problemes restringits de 3 cossos en els que els tres punts materials P_1, P_2 i P_3 tenen masses m_1, m_2 i $m_3=0$, respectivament. El fet de que la massa del cos P_3 sigui infinitesimal fa que aquest cos no influexi en el moviment dels cossos P_1 i P_2 (anomenats primaris); per tant, el moviment dels cossos P_1 i P_2 es coneix perquè vé donat per un problema de 2 cossos. En conseqüència, un problema restringit espacial de 3 cossos consisteix en descriure el moviment del cos de massa infinitesimal P_3 .

Tenim una gran varietat de problemes restringits de 3 cossos segons sigui el tipus d'òrbita solució del problema de 2 cossos que descriuen P_1 i P_2 . Així, per exemple, si P_1 i P_2 es mouen sobre òrbites el·líptiques o circulars parlarem del problema restringit el·líptic o circular espacial de 3 cossos, respectivament. El problema restringit el·líptic o circular pla de 3 cossos s'obté limitant el moviment del cos P_3 al pla determinat pel moviment de P_1 i P_2 . Les equacions del moviment d'aquests problemes restringits es donen en el Capítol II.

Habitualment, pels problemes restringits de 3 cossos, es pren la unitat de massa de manera que $m_1 + m_2 = 1$, o equivalentment $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$ amb $\mu \in [0, 1)$, on μ s'anomena el paràmetre de masses.

La present memòria consta essencialment de dues parts. En la primera, formada pels quatre primers Capítols, s'estudien principalment la singularitat de col·lisió (veure definició a la Secció (II.3)) i les òrbites d'ejecció-col·lisió (veure definició a la Secció (I.2)) del problema restringit el·líptic o circular, espacial o pla de 3 cossos. En la segona part, formada pel Capítol V s'utilitza un problema restringit de 4 cossos (tres amb massa i un altre de massa infinitesimal) per a donar una possible explicació gravitacional a la llei de Titius-Bode.

Les equacions del moviment del problema restringit circular (resp. el·líptic) espacial o pla de 3 cossos es poden formular com les d'un sistema Hamiltonià autònom (resp. no autònom) de 3 o 2 graus de llibertat, respectivament. Aquesta diferència entre el problema el·líptic i el circular fa que sigui més fàcil l'estudi del problema circular que la de l'el·líptic. La integral primera

donada pel Hamiltonià en el cas circular es coneix com la integral de Jacobi C.

Es ben conegut que un sistema Hamiltonià de n graus de llibertat no autònom es pot estudiar a través d'un sistema Hamiltonià autònom de $n+1$ graus de llibertat (veure Secció (V.4)). Per tant, els problemes restringits el·líptics o circulars, espacials o plans de 3 cossos admeten una formulació com a sistemes Hamiltonians autònoms, i com a tals, son integrables (veure Secció (I.1)) quan el paràmetre de masses $\mu=0$. En el Capítol III donem la descripció completa del flux global del problema restringit el·líptic espacial o pla de 3 cossos quan $\mu=0$, fent especial èmfasi en la descripció de les singularitats d'ejecció o col·lisió i de l'infinit. Aquest estudi, pel problema el·líptic, generalitza l'estudi similar fet per Llibre i Martínez-Alfaro [18] en el problema circular.

Els temes que a nosaltres més ens han interessat del problema el·líptic han estat l'estudi de la regularització de la singularitat d'ejecció o col·lisió, l'existència d'òrbites d'ejecció-col·lisió, (veure el Capítol III per $\mu=0$ i el Capítol IV per $\mu>0$)..... Aquests temes han estat molt treballats pel problema circular i formen part dels estudis clàssics, utilitzant principalment eines analítiques, com son els de Poincaré [21], Birkhoff [2], Levi-Civita [13], Sundman [26], Thiele [29], Lemaitre [12] ,....., i d'estudis més moderns basant-se principalment en eines geomètriques inspirades en les idees de McGehee [19] com l'esmentat abans ([18]). En el problema el·líptic, un dels temes treballats ha estat el de la regularització, tot i així molt menys estudiat que en el cas circular. Sobre aquest tema aquests darrers anys han aparegut diversos treballs com els de Schubart [23], Szebehely i Giacaglia [28], Broucke [4],..... En tots aquests articles les eines principals son

analítiques. El nostre estudi d'aquest tema en el problema el.líptic és més geomètric.

Nosaltres regularitzem la singularitat d'ejecció o col.lisió amb un primari pel problema restringit el.líptic espacial de 3 cossos utilitzant les idees geomètriques de McGehee [19]. Es a dir, s'explota la singularitat de col.lisió a una varietat invariant frontera, que s'anomena la varietat de col.lisió i que en aquest cas és una varietat 5-dimensional difeomorfa analíticament a $S^2 \times S^2 \times S^1$. El sistema d'equacions diferencials s'estèn analíticament a aquesta varietat de col.lisió i així l'estudi del flux sobre la mateixa, i en un entorn seu, permet conèixer el comportament de les solucions que passen prop de col.lisió. Això permet provar que les òrbites de col.lisió i d'ejecció del problema restringit el.líptic espacial de 3 cossos formen una varietat de dimensió 5 difeomorfa a $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}^2$. Resultats similars s'obtenen pel problema el.líptic pla i pels problemes circulars espacials o plans.

Poincaré [20] va notar la importància de les solucions d'ejecció-col.lisió en la generació de solucions periòdiques per valors del paràmetre de masses μ petit. Nosaltres hem provat el següent resultat (veure Secció (IV.2)).

TEOREMA A. Existeix un valor del paràmetre de masses μ_0 tal que per a cada $\mu \in [0, \mu_0)$ existeix un continu d'òrbites d'ejecció-col.lisió del problema restringit el.líptic de 3 cossos.

Les òrbites d'ejecció-col·lisió poden ésser pensades com a òrbites heteroclíniques connectant punts d'equilibri que estan sobre la varietat de col·lisió. La transversabilitat d'aquestes òrbites heteroclíniques en el problema restringit circular pla de 3 cossos ha estat provada per Lacomba-Llibre [11] quan la integral de Jacobi C pren valors prou grans i el paràmetre de masses μ és prou petit, per Chenciner-Llibre [5] per a tot valor de μ amb C prou gran. Aquí provem aquesta transversabilitat per a tot valor de $C > 2$ i μ prou petit (veure la Secció (IV.2)).

TEOREMA B. En el problema restringit circular pla de 3 cossos existeixen òrbites heteroclíniques transversals d'ejecció-col·lisió per qualsevol valor de la integral de Jacobi $C > 2$ si el paràmetre de masses μ és prou petit.

L'objectiu del Capítol V és donar una possible explicació gravitacional de la llei limit de Titius-Bode. La lleï de Titius-Bode fou observada per Titius en 1766 i divulgada per Bode al 1772 i diu que la distància mitjana a_k del Sol al planeta k obeïx aproximadament a la fórmula $a_k = 0.4 + 0.3 \times 2^k$ (per més detalls veure la Taula 1 del Capítol V). D'aquesta expressió es dedueix la lleï limit de Titius-Bode : si un planeta està prou lluny del Sol el següent planeta està aproximadament al doble de distància. El punt clau de la nostre possible explicació gravitacional d'aquesta lleï és el fet de tenir en compte el moviment del sistema solar al voltant del centre de masses de la galàxia. Per això, es pren un model simplificat de sistema solar que consisteix en un problema restringit de 4 cossos

format pel centre de masses de la galàxia, el Sol, un planeta interior i un planeta exterior de massa infinitesimal pel que es prova que el lloc més estable, on pot estar describint una òrbita periòdica quasi circular exterior a l'òrbita descrita pel planeta interior i en el mateix pla, està aproximadament al doble de distància de l'òrbita del planeta interior. El Capítol V ha estat publicat amb el títol "A gravitational approach to the Titius-Bode law" a la revista *The Astronomical Journal* 93 (1987), 1272-1279.

Finalment, voldria mostrar el meu agraïment al Dr. Jaume Llibre, per la dedicació i cura amb que ha dirigit aquest treball, així com a tots aquells que d'alguna manera o altra han contribuït a fer possible aquesta memòria.