LA INTEGRABILITAT DE LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA

Jaume Llibre

Universitat Autònoma de Barcelona

Les equacions diferencials de la mecànica poden ésser escrites en forma Hamiltoniana

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, (k = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

on $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ són les coordenades de l'espai de fases $\mathbb{R}^{2n}$ o d'un obert U de $\mathbb{R}^{2n}$, i $H:U \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció diferenciable. Així una funció H defineix un camp de vectors

$$X_H = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Anomenem *Hamiltonià* a la funció H i *sistema Hamiltonià amb n graus de llibertat* associat a H al sistema (1) de $2n$ equacions diferencials de primer ordre.

Sigui $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Definim el *parèntesi de Poisson* de F i H com la funció

$$\{F,H\} = X_H F = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial y_k} \right).$$