

PROBLEMES I JOCS

El problema 16 de Hilbert i els sistemes quadràtics

Jaume Llibre

El famós problema 16 de Hilbert consisteix en dues parts. En la segona es demana quin és el nombre màxim de cicles límits que pot tenir el sistema d'equacions diferencials

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \quad (1)$$

on P i Q són polinomis de grau $\leq n$ en les variables x i y (Hilbert, 1900).

Com que els sistemes lineals poden resoldre's utilitzant funcions elementals, el cas no trivial més simple possible és quan P i Q són polinomis relativament primers de grau menor que 3, que no siguin els dos lineals. Aquests sistemes s'anomenen quadràtics. L'objecte d'aquesta nota es descriure breument l'estat actual del problema de Hilbert pels sistemes quadràtics.

Una solució $x(t), y(t)$ de (1) es diu periòdica si existeix una constant real $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ i $y(t + T) = y(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Les solucions periòdiques de (1) aïllades dintre del conjunt de totes les solucions pe-