PROBLEMES I JOCS

Els nombres perfectes

En el llibre IX d'Euclides (any 300 a.C.) es defineix un nombre perfecte com aquell que és igual a la suma de tots els seus divisors positius diferents d'ell mateix. El 6 és perfecte, ja que $6 = 1\ 2\ 3$. Els grecs només coneixien els quatre primers nombres perfectes: 6, 28, 496 i 8128.

Euclides va observar que $6 = 2(2^2-1)$, $28 = 2^2(2^3-1)$, $496 = 2^4(2^5-1)$ i $8128 = 2^6(2^7-1)$; va demostrar també: "Si 2^n-1 és un primer, $2^{n-1}(2^n-1)$ és perfecte".

Aproximadament dos mil anys després, Cataldi i Fermat van demostrar: "Si 2^n-1 és un primer, també ho és n". El recíproc no és cert.

Euler va demostrar: "Tot nombre parell i perfecte és de la forma $2^{n-1}(2^n-1)$, essent 2^n-1 un primer".

Cataldi (1588) va engrandir la llista dels nombres perfectes coneguts en el seu temps fins a 7, que corresponen als valors de n: 2,3,5,7,13,17,19.

Euler (1772) va demostrar que per a $n = 31$ es té un altre nombre perfecte.

Els nombres perfectes són molt escassos. Fins el present només es coneixen 24 nombres perfectes, que corresponen als 8 valors de n anteriors i a $n = 61$, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213 i 19937.

Es conegut que tot nombre parell i perfecte acaba en un 6 o en un 8. No es coneixen nombres senars i perfectes; però si n'hi ha, han d'ésser més grans que 10^{50}.

Els nombres de la forma 2^n-1, on n és primer, es diuen nombres de Mersenne i es denoten per M_n , en honor de Mersenne, que els va estudiar el 1644. Es conegut que M_n és primer per als