Pub. Mat. UAB
Nº 23, Febrer 1981

UNA GENERALITZACIÓ DEL MÈTODE DE NEWTON-RAPHSON

Armengol Gasull, Secció de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Espanya.

Introducció.- En aquest treball estudiem un mètode iteratiu d'ordre 3 per a resoldre l'equació $f(x)=0$. El comparem amb un de molt semblant del mateix ordre, el de Txebyshev. Donarem sota certes condicions un teorema de convergència global i aplicarem aquest mètode a alguns exemples.

El mètode vé donat per $x_{n+1}= x_n+F(x_n)$, amb

$$F(x_n)=\frac{-f'(x_n)+\varepsilon(f'(x_n)^2-2f(x_n)f''(x_n))^{1/2}}{f''(x_n)}$$ on ε és el signe de $f'(x_n)$.

§1. Dues deduccions heurístiques.-(i) Les solucions de $g(x)=ax^2+bx+c=0$ són $s=(-b\pm(b^2-4ac)^{1/2})/2a$ o equivalentment $s=0+(-g'(0)\pm(g'(0)^2-2g(0)g''(0))^{1/2})/g''(0)$.

D'on intuim que una solució de $f(x)=0$ podem obtenir-la com a límit de la successió $x_{n+1}=x_n+(-f'(x_n)+\varepsilon(f'(x_n)^2-2f(x_n)f''(x_n))^{1/2})/f''(x_n)$. El valor de ε l'obtenim imposant que el límit de la successió (x_n) definida per $x_{n+1}=x_n + F(x_n)$ sigui una solució de $f(x)=0$. Per tant n'hi ha prou en prendre ε igual al signe de $f'(x_n)$.

(ii) Desenvolupant f per Taylor a un entorn del punt x : $f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+f''(x)(a-x)^2/2+f'''(x)(a-x)^3/6 \ldots$; si imposem $f(a)=0$ i aïllem a tenim :

(1) Considerant termes fins primer ordre $a=x-f(x)/f'(x)$, equació que indueix el mètode de Newton-Raphson (d'ordre 2 si l'arrel és simple).

(2) Si prenem fins a segon ordre, $a=x+(-f'(x)+\varepsilon(f'(x)^2-2f(x)f''(x))^{1/2}/f'(x)$, que porta a l'expressió obtinguda abans. Observem que si talléssim el desenvolupament a tercer i quart ordre i utilitzéssim després les formules de Scipione del Ferro i Bombelli per a resoldre les equacions polinòmiques obtingudes, tindriem mètodes més potents. Sembla que aquests mètodes serien d'ordre 4 i 5, respectivament.