Estudi del problema de Hill

com a camp vectorial polinomial

Josep M. Cors

INDEX

1. Introducció

La Mecànica Celest és una branca de les Matemàtiques que estudia els moviments dels cossos celests a partir de les lleis de la Mecànica. Com deia Henri Poincaré, la Mecànica Celest ens convenç de l'existència de lleis en la naturalesa i ens ensenya quant infinítament precises arriben a ésser.

D'una manera molt simplificada, l'objecte de la Mecànica Celest consisteix en estudiar un sistema d'equacions diferencials conegut com el problema dels n cossos. Aquest problema estudia el moviment de n masses puntuals en l'espai euclidià tridimensional sota les lleis de la gravitació newtoniana. Si x_k és la posició del k-èssim cos respecte un sistema de referència inercial i m_k és la massa, llavors el moviment dels n cossos ve donat pel següent sistema d'equacions diferencials

$$\ddot{x}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} m_j \frac{x_j - x_k}{\|x_j - x_k\|^3},$$

on $k = 1, \cdots, n$ i $\|x_j - x_k\|$ denota la distància euclídia entre m_j i m_k.

Físicament el model donat pel problema de n cossos és un model idealitzat. Com que els cossos no són puntuals, les lleis de gravitació no han pas d'èsser les newtonianes, l'espai no ha pas d'ésser l'euclidià, etc. Emperò, a falta d'una comprensió millor de les lleis físiques que governen el moviment dels astres, hom agafa el problema de n cossos com a model.

Se sap poca cosa del problema de n cossos quan $n \geq 3$, i per això el problema de 3 cossos és objecte d'un gran nombre de simplificacions. Així hom estudia els problemes restringits de 3 cossos, axió és, els problemes de 3 cossos en què una de les masses és infinitesimal, de manera que la influència que exerceix damunt de les altres dues és menyspreable. Per tant, el moviment d'aquests és el d'un problema de 2 cossos, i el problema restrigit de 3 cossos consisteix en descriure el moviment del cos de massa infinitesimal.

D'entre tots els problemes restringits de 3 cossos, el més clàssic és el problema restringit, circular i pla de 3 cossos: si emprem un sistema d'eixos giratoris en el qual els dos cossos de massa positiva m_1 i m_2 (anomenats primaris) estan en repòs, ens interessem pel moviment d'un tercer cos de massa nul.la sota l'acció gravitatòria dels dos primaris.

El problema restringit de 3 cossos ha tingut i té una importància de primer ordre. En efecte, pel matemàtic es presenta com un dels exemples més característic de sistema dinàmic no integrable, mentre que per l'astrònom constitueix la base més sólida per al càlcul d'efemèrides, el moviment de la lluna,etc.

El problema de Hill, que és el nostre problema d'estudi, va ser introduit pel propi G.W. Hill a finals del segle XIX per estudiar el moviment de la lluna.

Com hom sap el moviment del nostre satèlit es pot estudiar per mitjà del problema de 2 cossos (Terra-Lluna), el qual és integrable. El seu resultat, però, ens dóna una aproximació insuficient del moviment de la Lluna, ja que l'atracció que fa el Sol no la podem menysprear. Per aquest motiu, considerem, pel seu estudi, un problema de 3 cossos (Sol-Terra-Lluna) per obtenir-ne millors resultats. En aquest problema, el moviment de la Lluna (que serà el cos de massa infinitesimal) tindrà lloc prop del cos de la massa secundaria (Terra). Justament el problema de Hill és un cas l'imit del problema de tres cossos que estudia aquest tipus de moviments.

Encara que el problema de Hill sigui una simplificació del problema de 3 cossos continua sent un problema no integrable, per tant el coneixement global del flux és intrínsecament interessant.

L'objectiu principal d'aquesta memoria és obtenir informació del problema de Hill a partir de les seves equacions del moviment polinomials [Ch-Ll]. Utilitzant aquest fet obtenim com a resultat més important que el problema de Hill per nivells d'energia grans, quan fem el pas al límit, és integrable ja que provem que el seu flux és equivalent al flux del problema de Hill lineal. A més interpretem aquest nivell d'energia, integrable, com a varietats estable i inestable d'un cercle de punts crítics que viu a l'infinit del problema de Hill.

El camí per provar això consisteix en utilitzar l'expressió polinomial de les equacions del moviment (Secció 2) per poder realitzar la compactificació de Poincaré [C-Ll]. Aquesta ens portarà el flux definit sobre R^4 a l'esfera S^4, una còpia a cada hemisferi. Per tant l'equador d'aquesta esfera S^4, és a dir, una S^3, ens donarà l'expressió del flux del problema de Hill a l'infinit. Tenim així, una forma d'estendre el flux a l'infinit diferent a la introduida per McGehee [M]. Un cop coneixem explícitament el flux sobre l'infinit (Secció 3), ens preocupem per veure que passa en un entorn seu. Arribem a descriure amb exactitut com és el flux en el nivell d'energia $H = 0$ (Secció 4), es s dir, el flux del problema de Hill lineal en unes determinades coordenades, en un entorn de l'infinit.

Un estudi sobre el flux del problema de Hill, a la regió afitada, per valors de la constant de Jacobi grans es pot trobar a [Del].