Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Une description complète du portrait de phase d'un modèle d'élimination résonante

Alain CHENCINER, Armengol GASULL et Jaume LLIBRE

Résumé — Nous décrivons, pour toutes les valeurs des paramètres (α, β), le portrait de phase de la famille d'équations différentielles

$$\mathrm{E}(\alpha, \beta)\left\{\begin{array}{r} d\theta/dt = y, \\ dy/dt = \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta\cos(2\pi\theta), \end{array}\right.$$

($\gamma<0$ *et* $\delta>0$ *fixés*). Cette famille joue un rôle important dans l'élimination résonante des couples de courbes invariantes de difféomorphismes de $\mathbf{R}^2$ (*voir* [1]).

The phase portrait of a model of resonant elimination

Abstract — *We describe, for every value of the parameters* (α, β), *the phase portrait of the family of differential equations*

$$\mathrm{E}(\alpha, \beta)\left\{\begin{array}{r} d\theta/dt = y, \\ dy/dt = \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta\cos(2\pi\theta), \end{array}\right.$$

($\gamma<0$ and $\delta>0$ fixed). *This family plays an important role in the resonant elimination of couples of invariant curves of plane diffeomorphisms* (see [1]).

La famille à deux paramètres (α, β) d'équations différentielles sur le cylindre $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\mathbf{R}=\mathbf{T}^1\times\mathbf{R}$

$$\mathrm{E}(\alpha, \beta)\left\{\begin{array}{r} d\theta/dt = y, \\ dy/dt = \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta\cos(2\pi\theta), \end{array}\right.$$

($\gamma<0$ et $\delta>0$ fixés), est un exemple caractéristique des familles introduites dans [1] comme modèles de l'« élimination résonante » d'un couple de courbes invariantes par un difféomorphisme du plan. Les traits principaux du portrait de phase des familles de ce type ont été dégagés dans l'appendice de [1]; nous complétons ici cette étude en prouvant (et rectifiant par endroits) la partie conjecturale de la version prépublication de [1]. L'idée principale est l'exploitation conjointe du caractère « rotatoire » des sous-familles à α constant (*voir* [3], [4], et la démonstration de la remarque qui suit le lemme A7 de [1]) et de la formule de Liouville, miraculeusement simple ici, qui donne l'exposant caractéristique des orbites périodiques éventuelles en fonction de leur période. Plus précisément,

1° la position des singularités de $\mathrm{E}(\alpha, \beta)$ ne dépend que de α et la pente du vecteur $(y, \alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta\cos(2\pi\theta))$ est, à α, θ, $y\neq 0$ fixés, une fonction monotone de β;

2° l'exposant caractéristique $e(\mathrm{P})$ (logarithme de la dérivée en son point fixe d'une application de premier retour sur une transversale) d'une orbite périodique $\mathrm{P}: \theta=\theta_{\mathrm{P}}(t)$, $y=y_{\mathrm{P}}(t)$ de $\mathrm{E}(\alpha, \beta)$ de période $\mathrm{T}=\mathrm{T}(\mathrm{P})$ est donné par la formule classique de Liouville (*voir* par exemple [5])

$$e(\mathrm{P})=\int_0^{\mathrm{T}}\operatorname{trace}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\pi\delta\sin 2\pi\theta_{\mathrm{P}}(t) & \beta+2\gamma y_{\mathrm{P}}(t)\end{pmatrix}dt$$

$$=\beta\mathrm{T}+2\gamma\int_0^{\mathrm{T}} y_{\mathrm{P}}(t)\,dt=\beta\mathrm{T}+2\gamma\int_0^{\mathrm{T}}\{d\theta_{\mathrm{P}}/dt\}(t)\,dt=\beta\mathrm{T}+2\mathrm{N}(\mathrm{P})\gamma,$$

Note présentée par René THOM.

0249-6291/87/03050623 $ 2.00