

**SISTEMES DIFERENCIALS QUADRATICS**

JOAN CARLES ARTÉS FERRAGUD

**SISTEMES DIFERENCIALS QUADRATIC.**

*Joan Carles Artés Ferragud*

Memòria presentada per a optar al grau  
de Doctor en Ciències Matemàtiques.

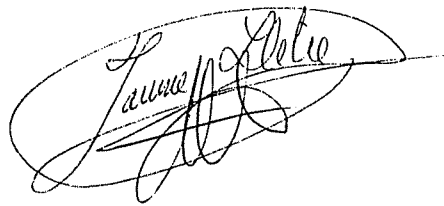
Departament de Matemàtiques.

Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, abril de 1990.

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per en Joan Carles Artés Ferragud, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, abril de 1990.

A handwritten signature in black ink, enclosed in a large, loopy oval. The signature is written in a cursive style and appears to read "Jaume Llibre i Saló".

Dr. Jaume Llibre i Saló

## INDEX

<b>INTRODUCCIO.</b> .....	9
<b>PART 1. Resultats preliminars. El programa</b>	
<b>CAPITOL I. Definicions.</b> .....	11
<b>CAPITOL II. El teorema S restringit als sistemes quadràtics</b> .....	22
<b>CAPITOL III. El teorema H restringit als sistemes quadràtics</b> .....	25
<b>CAPITOL IV. El programa</b> .....	45
Apèndix .....	73
<b>PART 2. Sistemes diferencials quadràtics amb un focus dèbil de tercer ordre</b>	
<b>CAPITOL I. Introducció i resultats</b> .....	79
(I.1) El problema .....	79
(I.2) Retrats de fase del sistema (1) .....	81
(I.3) Retrats de fase del sistema (2) .....	95
(I.4) Retrats de fase del sistema (3) i (4) .....	98
<b>CAPITOL II. Estudi del sistema (1)</b> .....	99
(II.1) Punts crítics finits .....	99
(II.2) Punts crítics a l'infinit .....	107
(II.3) Retrats de fase .....	111
<b>CAPITOL III. Estudi del sistema (2)</b> .....	116
(III.1) Punts crítics finits .....	116

(III.2) Punts crítics a l'infinit.....	117
(III.3) Retrats de fase.....	118
Apèndix.....	119
 <b>PART 3. Sistemes diferencials quadràtics amb quatre punts crítics finits i una recta invariant.</b>	
<b>CAPITOL I. Plantejament del problema.</b> .....	123
<b>CAPITOL II. Cas (0,0,0)</b> .....	136
<b>CAPITOL III. Cas (0,+,0)</b> .....	139
<b>CAPITOL IV. Cas (0,0,+)</b> .....	144
<b>CAPITOL V. Cas (0,+,+)</b> .....	154
<b>CAPITOL VI. Cas (+,+,0)</b> .....	159
<b>CAPITOL VII. Cas (-,+,0)</b> .....	165
<b>CAPITOL VIII. Cas (0,+,-)</b> .....	193
<b>CAPITOL IX. Altres casos</b> .....	248
 <b>PART 4. Observacions</b>	
<b>OBSERVACIONS</b> .....	263
<b>Referències</b> .....	267

## INTRODUCCIO

L'estudi de les equacions diferencials en el pla ha estat un tema central de les Matemàtiques d'ençà que H. Poincaré va presentar la seva tesi sobre aquest subjecte, ara farà uns cent anys. De les diferents famílies en que podem dividir el seu estudi, molt poques les sabem resoldre quantitativament, per exemple els sistemes lineals. El següent pas en quant a complexitat, podria consistir en intentar resoldre els sistemes diferencials quadràtics, és a dir, aquells en els que les funcions són polinomis de segon grau en les dues variables. Aquest treball pretén afegir un pas més en el seu estudi, a més d'aportar un programa d'ordinador per a dibuixar el seu retrat de fase.

El treball es troba dividit en quatre parts. En la primera part es donen les definicions i els teoremes principals necessaris per a aprofundir en l'estudi dels sistemes diferencials en general. En seguida ens posem a treballar més en concret sobre els sistemes diferencials quadràtics, restringim els teoremes a aquest cas i els hi busquem una formulació algorítmica per a ser implementada a un ordinador. Al final de la primera part fem una descripció del programa d'ordinador que ens estudiarà el sistema diferencial i ens dibuixarà les corbes principals (separatrius) del seu retrat de fase.

La segona part del treball és un estudi teòric i numèric dels sistemes diferencials quadràtics amb un focus dèbil de tercer ordre. Tret d'algunes adaptacions necessàries amb la primera part, i d'algunes mínimes correccions, correspon exactament al treball de llicenciatura que varem presentar el mes de Juliol de 1984 en aquesta mateixa universitat.

La tercera part és un estudi teòric dels sistemes diferencials quadràtics limitat a aquells sistemes que tenen el màxim nombre de punts crítics finits isolats, és a dir, quatre. Tot i que es tenen les eines bàsiques per a la conclusió de l'estudi, ens limitem als casos que, a més, tenen una recta invariant.

En la quarta part es fan unes observacions generals del que resta per a estudiar sobre els sistemes diferencials quadràtics.

Val a dir que la part més complexa d'estudiar en els sistemes diferencials, és l'existència o no de cicles límits. Tant per a la part dos, com per a la part tres, disposem dels suficients resultats generals per a assegurar la presència o no de cicles límits.

Per a acabar voldria agrair al professor Armengol Gasull per les seves indicacions i consells que m'han permès de millorar el programa en molts dels seus punts, i que a més, m'ha proporcionat molts exemples pels que calia precisar una mica més les rutines. Així mateix voldria agrair al professor Ye Yanqian per la seva confiança en els resultats que el programa numèric li va proporcionar per a la comprovació dels seus treballs (veure [YWA]). També voldria agrair al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Bellaterra, i a la pròpia Universitat, per l'ambient i el companyerisme que m'han proporcionat les circumstàncies ideals per a la investigació. Val a dir que aquest treball no hagues estat possible si no hagues pogut disposar del material tècnic que s'ens ha donat en aquests darrers anys.

Però molt especialment voldria agrair al professor Jaume Llibre per la seva confiança en mi des que, cursant l'últim curs de la meva llicenciatura, hem va introduir en la investigació dels sistemes quadràtics indicant-me de que iniciés el que ara és la Part 2 d'aquests treball. Durant aquests anys en que ell ha estat dirigint varies tesis simultàniament, puc assegurar que en tot moment me he sentit com si només estigues dirigint el meu treball, donada la seva dedicació i atenció constants al que estava fent. Atenció que, no per esser constant, em suposava el fet d'anar més de presa, doncs en tot moment vaig disposar de la tranquil·litat suficient per a adaptar-me a la vida docent i familiar.

Així mateix, ha sapigut enfocar el treball en la direcció que jo millor podia desenvolupar, tant en la via teòrica com en la numèrica. En resum, ha estat, i segueix essent un perfecte director de memòries i un excellent company.