ÒRBITES PERIÒDIQUES AL PLA PER A CAMPS VECTORIALS POLINOMIALS I POLINOMIALS A TROSSOS.

Rafel J. Prohens i Sastre.

Memòria presentada per a aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, octubre de 1994.

CERTIFICO que la present memòria
ha estat realitzada per En
Rafel J. Prohens i Sastre,
i dirigida per mi, al Departament de
Matemàtiques de la Universitat Autònoma
de Barcelona.

Bellaterra, octubre de 1994.

Dr. Armengol Gasull i Embid.

INDEX

Capítol III: DIFFERENTIAL EQUATIONS DEFINED BY THE SUM OF TWO QUASI-HOMOGENEOUS VECTOR FIELDS

Capítol IV: LIMIT CYCLES FOR NON SMOOTH DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA SCHWARZIAN DERIVATIVE

Capítol V: FIRST LYAPUNOV QUANTITIES FOR SMOOTH AND NON-SMOOTH DIFFERENTIAL EQUATIONS

INTRODUCCIÓ

En termes generals per sistema dinàmic s'entén un model matemàtic que simula l'evolució, en el temps, d'un cert organisme. Les estratègies per a la construcció d'aquests models matemàtics per a organismes físics, químics, biològics, socials, etc. (*sistema observat*), depenent d'alguns paràmetres observables, és el primer pas en l'activitat modeladora de la *Teoria dels Sistemes Dinàmics*. De fet el sistema observat no es podrà descriure per alguns paràmetres només, però es pretén que així sigui en la *idealització matemàtica*. Aquesta idealització ens condueix a un model geomètric pel conjunt de tots els estats ideals de l'organisme, *espai de fases*. Diferents models poden donar lloc a diferents espais de fases. La relació entre l'estat actual de l'organisme i els punts del model geomètric és una ficció que és objecte de discussió.

De la pròpia definició, els sistemes dinàmics han de tractar amb el concepte de canvi, variació del canvi, variació de la variació del canvi i així successivament. Per això, i com ho començaren a fer Newton (1642–1729) i Leibniz (1646–1716), l'evolució del sistemes dinàmics s'inicià dins l'àmbit de les *equacions diferencials ordinàries*. Els problemes que motivaren aquest desenvolupament foren l'estudi de la dinàmica puntual i dels cossos rígids, certs problemes geomètrics i problemes de la mecànica celeste. L'ús de mètodes particulars de resolució de tipus concrets d'equacions diferencials a partir del càlcul diferencial i integral, varen ésser les vies que, fins al segle XIX, se seguiren a l'hora d'abordar la investigació d'equacions diferencials dins les àrees de la mecànica, geometria diferencial i del càlcul de variacions, especialment.

El darrer quart del segle XIX sorgeix un dels desenvolupaments més importants en la història de les equacions diferencials: la creació de la investigació qualitativa de les equacion diferencials, *Teoria Qualitativa*, expressió procedent de H. Poincaré (1854–1912) qui la inicià juntament amb A.M. Lyapunov (1857–1918). Aquesta renovadora teoria s'enfrontà al fet que són relativament poques les equacions diferencials que admeten solució per quadratura i, per tant, si es vol aclarir el comportament de les corbes integrals d'una equació diferencial qualsevol $y' = f(x, y)$, o bé d'un sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \psi_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi_2(x, y), \end{cases} \tag{I}$$

definit a tot el pla, s'ha de fer sense integrar les equacions, això és, exclusivament per mitjà de l'estudi de les propietats de les funcions ψ_1 i ψ_2. És, aleshores, el primer cop a la història en què l'estudi de les equacions diferencials s'aborda des d'una branca diferent de la de la matemàtica pura: la de la geometria i topologia.

La reducció a l'estudi de sistemes d'equacions diferencials al pla, lluny d'ésser-ho, s'ha d'entendre com a un primer i més simple cas que s'estudia tant per la seva pròpia importància com a preliminar a la consideració de casos més complexos. En aquests tipus de sistemes ja hi ha qüestions de la Teoria Qualitativa d'equacions diferencials que es reproduiran a ordres superiors, si bé amb un grau de dificultat major, i que són les següents:

- Té el sistema (I) corbes integrals que són corbes tancades?.

- Són les solucions corresponents a un punt d'equilibri estables o inestables?.

- Per a quines regions de les variables, els punts de les corbes integrals tendeixen a un estat d'equilibri quan s'incrementa la variable temps, t?.

La història de l'interès per a l'estudi de les òrbites periòdiques està animada per la música. Fins al voltant de 1800, el concepte dominant als sistemes dinàmics fou el de punt límit. Aleshores, els experiments de Chaldri (1756–1827) amb instruments musicals presentats a Napoleó feren créixer, en la consciència de la comunitat científica, la idea de *cicle límit* (òrbita periòdica aïllada diferent d'un punt crític) . L'estudi de processos i fenòmens periòdics als camps de la mecànica, òptica, acústica, etc. està sotmesa a la *Teoria Oscil·latòria.* Rayleigh (1842–1912), dins l'àmbit de la dinàmica experimental, a la fi del s.XIX publicà la primera exposició comprensiva de la Teoria General Oscil·latòria. El celebrat "Treatise on the Theory of Sound". D'altra banda, l'interès per a l'estudi de les òrbites periòdiques rau, també, en el camp de la mecànica celeste, el qual, fins al s.XIX, fou l'únic que tragué profit de la Teoria Qualitativa de les equacions diferencials. A l'inici del present segle, però, té lloc un canvi essencial. El desenvolupament de la tecnologia involucrant la necessitat de l'ús de la Teoria Oscil·latòria. Particularment rellevants qüestions de radio-enginyeria es reflecteixen a la terminologia matemàtica de la Teoria Qualitativa d'equacions diferencials. Per exemple, la qüestió d'existència o no existència d'oscil·lacions per a diversos valors dels paràmetres, correspon a la qüestió d'existència o no-existència de cicles límit a un sistema d'equacions diferencials. D'entre els seguidors de Rayleigh, l'experimentalista B. van der Pol (1889–1959) fou particularment prestigiós. Treballà amb els primers oscil·ladors electrònics basats en tubs del buit, donant exemples de sistemes físics oscil·latoris mitjançant models dinàmics amb atractors periòdics, c.f. [**Po**, 1927]. De la mateixa època són els estudis de A. Liénard, [**Lie**, 1928], del qual és ben coneguda l'equació que duu el seu nom, en relació amb la teoría d'oscil·lacions no lineals.

Com a conseqüència de l'interès pels cicles límit, la qüestió que es planteja és la següent: "atès un sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases} \tag{II}$$

amb P i Q polinomis, quants cicles límits té?". Aquesta qüestió ens condueix a una altra de més ambiciosa citada a la segona part del problema número 16 de la famosa llista de 23 problemes proposats per D. Hilbert (1862–1943) al Congrés Internacional de Matemàtics (París, 1900) i que és: "Determinau el nombre màxim, $H(n)$, de cicles límit del camp de vectors (II), on P i Q són polinomis de grau n". Part de la fascinació d'aquest problema rau en la simplicitat del seu enunciat i part en el fet que, mentre la hipòtesi és algèbrica, la conclusió és topològica. N.N. Bautin, [**Bau**, 1952], provà que $H(2) \geq 3$ i Shi, [**S**, 1979], i Chen i Wang, [**CW**, 1979], que $H(2) \geq 4$. H. Dulac, en el seu clàssic treball [**Dul**, 1923], fou el primer a afrontar una prova de la finitud del nombre de cicles límit pels sistemes polinomials però, malauradament, la prova era incompleta, com ha estat provat per Yu. S. Ilyashenko [**I1**, 1985].

Si per *gràfic* a $\mathbb{S}^2$ (o $\mathbb{R}^2$ o a un obert de $\mathbb{S}^2$) entenem una immersió orientada de $\mathbb{S}^1$ formada per punts singulars $p_1, \ldots, p_m, p_{m+1} = p_1$ (no necessàriament diferents) i òrbites orientades regulars $s_1, \ldots, s_m$ connectant-los de manera que s_j és una separatriu inestable de p_j i una separatriu estable de p_{j+1}; aleshores, de la Teoria de Bendixson Poincaré i usant la compactificació de Poincaré es pot veure que si l'equació (II) tengués infinits cicles límits, aleshores la compactificació d'aquesta tendria un gràfic en el qual s'acumularien infinits cicles límits. Per a la prova de la finitud del nombre de cicles límit, Dulac introduí eines que encara ara són imprescindibles (formes normals, sèries assimptòtiques, etc.) i anà molt lluny en la direcció de la prova que l'aplicació de retorn (o aplicació de Poincaré), associada a un gràfic no podia tenir una acumulació de punts fixos. Per tant, el *problema de Dulac* o *Teorema de Dulac* és equivalent al *problema local*: cap gràfic pot ésser acumulació de cicles límit, o el que és el mateix, l'aplicació de retorn associada a un gràfic donat és o bé la identitat o admet, com a molt, un nombre finit de punts fixos. Cal dir que Poincaré ja havia estudiat el problema de la finitud del nombre cicles límit d'un sistema polinomial, arribant a la conclusió que l'existència de gràfics no és genèrica.

R. Bamón, [**Bam**, 1987], ha provat que cap sistema quadràtic, i. e. sistema com (II) amb P i Q de grau 2, pot tenir un nombre infinit de cicles límit. Més en general, recentment, J. Écalle, [**E**, 1990], and Yu.S. Ilyashenko, [**I2**, 1990], han provat el Teorema de Dulac, i.e. que que atesa una elecció particular de coeficients per a un sistema de la forma (II), el nombre màxim de cicles límit és finit. De fet, i com el mateix Écalle diu, "la característica polinomial de l'enunciat del Teorema de Dulac és una pista falsa i el genuí enunciat és que els cicles límits d'un camp real analític sobre $\mathbb{R}^2$ no poden acumular-se enlloc" (sic).

Poca cosa més es coneix sobre la fita superior, si existeix, de $H(n)$ i només es tenen afitaments inferiors per a n arbitrari. Àdhuc per a sistemes polinomials amb part no lineal quadràtica, aquesta és una qüestió oberta. Val a dir, però, que en l'actualitat hi ha línies de recerca per tal de millorar el Teorema de Dulac. Concretament, l'escola d' Ilyashenko, treballa en la prova de la finitud del nombre màxim de cicles límit per a famílies multiparamètriques genèriques de sistemes del tipus (II).

Lo exposat anteriorment és una justificació de l'interès que té l'estudi d'equacions diferencials de certs tipus particulars. De fet, per exemple, s'han publicat més de 700 treballs relacionats amb els sistemes quadràtics, vegeu [**R**, 1994], desde principi de segle.

La present memòria tracta sobre equacions diferencials al pla. Si es vol una descripció més detallada del contingut dels capítols, vegeu-ne el resum que es fa a l'inici de cadascun d'ells. Tots ells poden ésser llegits de manera independent i contenen les seves pròpies referències. Breument es poden descriure de la següent manera.

En el Capítol I es dóna una classificació dels sistemes quadràtics amb un punt crític degenerat tipus "cúspide". La classificació donada resol, en bastants casos i per aquesta família concreta, el problema plantejat per Coppel a [**Co**, 1966] referent a la caracterització del retrat de fase d'un sistema quadràtic en termes de desigualtats entre els coeficients del sistema. Una altra via d'aproximació al problema considerat en aquest capítol es pot trobar a [**J**, 1990], on part dels resultats s'obtenen numèricament. El punt clau que ens permet millorar els resultats que apareixen al treball citat ha estat l'ús de les famílies rotatòries de camps vectorials. Vegeu [**Duf**, 1953] i [**Pe**, 1975].

Els següents tres capítols tenen en comú la via d'aproximació al control del nombre d'òrbites periòdiques. Aquesta via, usada també per diversos autors (vegeu [**Ch**, 1976], per exemple) consisteix en demostrar que les òrbites periòdiques poden expresar-se, en coordenades polars (r,θ) (o en polars generalitzades, vegeu [**Ly**, 1966]) com $\{r=r(\theta),\, \theta\in[0,T]\}$. En aquestes coordenades la multiplicitat de les òrbites periòdiques es pot controlar usant els reultats donats per [**Ll1**, 1979], o lleugeres modificacions d'aquests.

En el Capítol II es tracten alguns problemes als sistemes quadràtics i cúbics. Més concretament, es donen exemples senzills de bifurcacions uniparamètriques d'una banda, es classifiquen afinment els sistemes quadràtics que tenem l'infinit degenerat d'altra banda i finalment es considera el problema del nombre de cicles límit dels sistemes cúbics amb l'infinit degenerat. Dels resultats sobre els sistemes quadràtics que tenen l'infinit degenerat que aquí s'obtenen, es dedueixen els de l'article [**ChL**, 1993].

El Capítol III estableix criteris per a l'afitació del nombre màxim, la seva localització i l'estabilitat dels cicles límit que poden tenir les equacions diferencials al pla definides per la suma de dos camps vectorials quasi-homogenis. Particularment, es dóna un criteri per determinar quan aquests sistemes tenen, com a màxim, tres cicles límit. Aquest treball generalitza resultats coneguts per a camps vectorials amb parts no lineals homogènies. Vegeu les referències [**CL**, 1989], [**Ll2**, 1986] i [**Lin**, 1980], per exemple.

El Capítol IV tracta de sistemes d'equacions polinomials definits al pla en dos trossos. Concretament, la recta $y = 0$ es pren com a frontera entre ambdós sistemes. Els resultats que s'hi obtenen són del tipus dels de l'anterior capítol. Val la pena remarcar que un gran nombre de problemes de la mecànica, electrònica i Teoria del Control Automàtic usen aquests sistemes, vegeu [**AKV**, 1966], per exemple. En aquest àmbit es fa necessari reexaminar i, en alguns casos, redefinir conceptes de la teoria d'equacions diferencials ordinàries. En aquest sentit [**F**, 1988] n'és una via d'aproximació. Finalment volem fer notar que, en l'estudi de la multiplicitat del cicles límit d'aquests sistemes és clau l'ús de la derivada Schwarziana, [**H**, 1968].

Es ben conegut que l'estudi de l'estabilitat dels punts crítics de tipus focus d'equacions de la forma $\dot{z} = iz + F(z, \overline{z})$, $z \in \mathbb{C}$ es redueix al càlcul de les anomenades constants de Liapunov. L'obtenció d'expressions d'aquestes constants es complica ben aviat ja que el nombre d'operacions involucrades augmenta ràpidament. En el Capítol V es dóna una petita variacio del mètode explicat a [**ALGM**, 1967] que usa especialment l'estructura complexa en lloc de prendre les equacions a $\mathbb{R}^2$. Aquesta variació permet calcular de manera senzilla les primeres constants V_3 i V_5. També s'aplica la mateixa idea per a obtenir expressions de V_1, V_2 i V_3 per a un punt crític de tipus "focus" d'un sistema donat per un camp amb una línia de discontinuïtats.

Els resultats del Capítol I apareixeran publicats al Rocky Mountain Journal of Mathematics, sota el nom "On Quadratic systems with a degenerate critical point", i els del Capítol III al Canadian Journal of Mathematics, sota el nom de "Differential equations defined by the sum of two quasi-homogeneous vector fields". Els resultats dels capítols III i IV d'aquesta Memòria, estan fets en col·laboració amb el Dr. B. Coll.

Agraeixo als Drs. A. Gasull i B. Coll la seva col·laboració i el constant estímul que m'ha suposat poder fer feina amb ells. Particularment he d'agrair al Dr. A. Gasull la dedicació amb què ha dirigit aquest treball, i al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona el suport i l'ambient de feina que allí hi ha i que tant m'ha ajudat. Vull agrair a Na Maria i En Joan la seva hospitalitat.

Bellaterra, octubre de 1994.

Referències

[AKV] Andronov, A.A., Khaikin, S.E., Vitt, A.A., "Vibration Theory", Pergamon Press, Oxford, 1966.

[ALGM] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon I.I , Maier, A.G.,"Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane ", John Wiley and Sons, New York-Toronto, 1967.

[Bam] Bamón, R., *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles*, I. H. E. S. Publ. Math. **64** (1987), 111–142.

[Bau] Bautin, N.N., *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or centre type*, Mat. Sb. **30** (1952), 181–196, (en rus). Amer. Math. Soc. Transl. **100** (1954).

[Ch] Cherkas, L. A., *Number of limit cycles of an autonomous second order system*, Diff. Eq. **5** V.12 (1976), 666–668.

[Co] Coppel, W. A., *A Survey of Quadratic Systems*, J. of Diff. Eq. **2** (1966), 293–304.

[CL] Carbonell, M., Llibre, J., *Limit cycles of polynomial systems with homogeneous non-linearities*, J. of Math. Anal. and Appl. **2** (1989), 573–590.

[ChL] Chen Guang-Qing, Liang Zhao-Jun, *Affine classification for the quadratic vector fields without the critical points at infinity*, J. of Math. Anal. and Appl. **172** (1993), 62–72.

[CW] Chen Lansun, Wang Mingshu, *The relative position and number of limit cycles of the quadratic differential system*, Acta Math. Sinica **22** (1979), 751–758.

[Duf] Duff, G. F. D., *Limit cycles and rotated vector fields*, Ann. of Math. **67** (1953), 15–31.

[Dul] Dulac, H. *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France **51** (1923), 45–188.

[E] Écalle, J., *Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'aplication de retour*, Lecture Notes in Math. 1445, Bifurcations of planar vector fields. Proceedings Luminy 1989. Springer–Verlag **142-2** (1990), 74–159.

[F] Filippov, A.F., "Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides", Kluwer Academic Publ., Netherlands, 1988.

[H] Hille, E., "*Lecture on Ordinary Differential Equations*", Addison-Wesley, (1968).

[I1] Ilyashenko, Yu.S., *Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations*, Uspekhi Mat. Nauk **40:6** (1985), 41–78 (en rus); Russian Math. surveys **40:6** (1985), 1–49.

[I2] Ilyashenko, Yu.S., *Finiteness theorems for limit cycles*, Russian Math. surveys **40** (1990), 143–200.

[J] Jager, P. de, *Phase portraits for quadratic systems with a higher order singularity with two zero eigenvalues*, J.of Diff. Eq. **87** (1990), 169–204.

[Lie] Liénard, A., *Étude des oscillations entretenues*, Revue Général de l'Électricité **XXIII–21**, 901–912, **XXIII–22** 946–954, (1928).

[Lin] Lins, A., *On the number of solutions of the equation* $dx/dt = \sum a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, *for which* $x(0) = x(1)$, Invent. Math. **59** (1980), 67–76.

[Ll1] Lloyd, N,G., *A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems*, J. London Math. Soc. **20** (1979), 277–286.

[Ll2] Lloyd, N,G., *Limit cycles of certain polynomial systems in "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications* ", S.P. Singh, Ed., NATO ASI Series C, Reidel, Dordrecht, **173** (1986), 317–326.

[Ly] Lyapunov, A. M., "Mathematics in Science and Engineering", Academic Press, New York, London, 1966.

[Pe] Perko, L.M., *Rotated vector fields and the global behaviour of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane*, J. of Diff. Eq. **18** (1975), 63–86.

[Po] Pol, B. van der, *Sur les oscillations de relaxation*, Revue Général de l'Électricité **XXII** (1927), 489–490.

[R] Reyn, J.W., *Report 94–02. A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane. Third edition*, Reports of the Faculty of Tech. Math. and Inf. (1994), Technische Universiteit Delft.

[S] Shi Songling, *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica **XXIII-2** (1980), 153–158.