C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, p. 1035-1040, 1994

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Periods for continuous self maps of a bouquet of circles

Jaume LLIBRE and Ana SÁ

Abstract – Let G_k be a bouquet of circles. Two continuous self maps f and g on G_k are called homological, and we write $f \simeq g$, if they induce the same action on the homology groups of G_k. The minimal set of periods of f is $\bigcap_g \mathrm{Per}(g)$ for all g such that $g \simeq f$. Here we present the characterization of the minimal sets of periods for continuous self maps on G_k, for $k = 1, 2$, and some partial results for $k \geqq 3$. This Note is a summary of [10].

Périodes des applications continues d'un bouquet de cercles dans lui-même

Résumé – *Soit* G_k *un bouquet de cercles. Deux applications continues* f *et* g *de* G_k *dans lui-même sont appelées homologiques, et nous écrivons* $f \simeq g$, *si elles déterminent la même action sur les groupes d'homologie de* G_k. *L'ensemble minimal des périodes de* f *est* $\bigcap_g \mathrm{Per}(g)$ *pour toutes les* g *telles que* $g \simeq f$. *Ici nous présentons la caractérisation des ensembles minimaux des périodes pour les applications continues de* G_k *dans lui-même pour* $k = 1, 2$ *et quelques résultats partiels pour* $k \geqq 3$.

Version française abrégée – Soit G_k un *bouquet de* k *cercles*, c'est-à-dire, l'espace quotient de $[0, k]$ obtenu en identifiant les points de coordonnées entières à un seul point. On note que G_1 est le *cercle* et que G_2 est ce qu'on appelle habituellement l'*espace huit*.

Soit $f : G_k \to G_k$ une application continue. On dit que $p \in G_k$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$. Si p est un point fixe de f^n, pour un certain entier $n \in \mathbf{N}$ on dit que p est un *point périodique de période* n de f si n est le plus petit entier positif tel que $f^n(p) = p$.

On dit que $f, g : G_k \to G_k$ sont deux applications continues homologiques si elles déterminent les mêmes endomorphismes sur les groupes d'homologie de G_k, et on écrit $g \simeq f$. On défine l'*ensemble minimal de périodes de* f comme l'ensemble

$$\mathrm{M\,Per}(f) = \bigcap_{g \simeq f} \mathrm{Per}(g).$$

Alors $\mathrm{M\,Per}(f)$ est l'ensemble maximal des entiers positifs tels que $\mathrm{Per}(g) \supset \mathrm{M\,Per}(f)$ pour toutes les g telles que $g \simeq f$.

Dans cette Note nous caractérisons l'ensemble minimal des périodes $\mathrm{M\,Per}(f)$ pour une application continue $f : G_k \to G_k$. Nous avons obtenu une caractérisation complète pour $k = 1, 2, 3$ et quelques résultats partiels pour $k \geqq 4$. Cette Note est un résumé des résultats de [10].

Même pour les applications continues du cercle dans lui-même, $f : G_1 \to G_1$, la caractérisation des ensembles minimaux de périodes $\mathrm{M\,Per}(f)$ est intéressante et n'est pas triviale, *voir* théorème 1. Ce résultat a été établi par Efremova [6] et Block, Guckenheimer, Misiurewicz et Young [3] sans une démonstration complète. La première preuve que nous connaissons est celle donnée par Alsedà, Llibre et Misiurewicz [2].

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs, et $k\mathbf{N}$ l'ensemble $\{kl : l \in \mathbf{N}\}$.

Note présentée par Gérard Iooss.