Subsèries i sèries amb signe

Francesc Mañosas

11 Juny 2019

Armengol 60

11 Juny 2019

Introducció

Introducció

A. Gasull I F.M. Subseries and signed series. Communications on Pure and Applied Analysis (2019)

Introducció

A. Gasull I F.M. Subseries and signed series. Communications on Pure and Applied Analysis (2019)

Considerem $\{a_n\}$ una successió positiva estrictament monòtona amb $\lim a_n = 0$ i $\sum a_n = \infty$. Volem caracteritzar les subsuccessions de $\{a_n\}$ amb suma convergent.

Introducció

A. Gasull I F.M. Subseries and signed series. Communications on Pure and Applied Analysis (2019)

Considerem $\{a_n\}$ una successió positiva estrictament monòtona amb $\lim a_n = 0$ i $\sum a_n = \infty$. Volem caracteritzar les subsuccessions de $\{a_n\}$ amb suma convergent.

Aquesta caracterització la volem en termes de la "densitat"de la subsuccessió. Una subsuccessió $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ es pot pensar que ve donada per una succesió $k_i \in \{0, 1\}$ de manera que $b_n = k_n a_n$.

Introducció

A. Gasull I F.M. Subseries and signed series. Communications on Pure and Applied Analysis (2019)

Considerem $\{a_n\}$ una successió positiva estrictament monòtona amb $\lim a_n = 0$ i $\sum a_n = \infty$. Volem caracteritzar les subsuccessions de $\{a_n\}$ amb suma convergent.

Aquesta caracterització la volem en termes de la "densitat"de la subsuccessió. Una subsuccessió $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ es pot pensar que ve donada per una succesió $k_i \in \{0,1\}$ de manera que $b_n = k_n a_n$.

Anomenem densitat de la subsuccessió a la successió

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Introducció

A. Gasull I F.M. Subseries and signed series. Communications on Pure and Applied Analysis (2019)

Considerem $\{a_n\}$ una successió positiva estrictament monòtona amb $\lim a_n = 0$ i $\sum a_n = \infty$. Volem caracteritzar les subsuccessions de $\{a_n\}$ amb suma convergent.

Aquesta caracterització la volem en termes de la "densitat" de la subsuccessió. Una subsuccessió $\{b_n\}$ de $\{a_n\}$ es pot pensar que ve donada per una succesió $k_i \in \{0, 1\}$ de manera que $b_n = k_n a_n$.

Anomenem densitat de la subsuccessió a la successió

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

La sèrie harmònica

La sèrie harmònica

El cas de la sèrie harmònica és ben conegut i estudiat.

- L. Moser, *On the series,* $\sum 1/p$. Amer. Math. Monthly **65** (1958) 104–105.
- T. Šalát, *On subseries*, Math. Z. **85** (1964) 209–225.
- B. J. Powell, T. Salát, *Convergence of subseries of the harmonic series and asymptotic densities of sets of positive integers*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **50** (1991), 60–70.
- C. P. Niculescu, G. T. Prăjitură, *Some open problems concerning the convergence of positive series*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. **6** (2014) 92–107.
- B. Lubeck, V. Ponomarenko, *Subsums of the Harmonic Series*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), 351–355.

La sèrie harmònica

El cas de la sèrie harmònica és ben conegut i estudiat.

- L. Moser, *On the series,* $\sum 1/p$. Amer. Math. Monthly **65** (1958) 104–105.
- T. Šalát, *On subseries*, Math. Z. **85** (1964) 209–225.
- B. J. Powell, T. Salát, *Convergence of subseries of the harmonic series and asymptotic densities of sets of positive integers*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **50** (1991), 60–70.
- C. P. Niculescu, G. T. Prăjitură, *Some open problems concerning the convergence of positive series*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. **6** (2014) 92–107.
- B. Lubeck, V. Ponomarenko, *Subsums of the Harmonic Series*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), 351–355.

La sèrie harmònica

La sèrie harmònica

Per a què la sèrie convergeixi cal que $\lim f_n = 0$. És una condició necessària però no suficient.

La sèrie harmònica

Per a què la sèrie convergeixi cal que $\lim f_n = 0$. És una condició necessària però no suficient.
Un exemple paradigmàtic és la suma dels inversos dels primers

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}.$$

La sèrie harmònica

Per a què la sèrie convergeixi cal que $\lim f_n = 0$. És una condició necessària però no suficient.

Un exemple paradigmàtic és la suma dels inversos dels primers

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}.$$

Si denotem per $\pi(n) = \text{Card}\{i \leq n; i \text{ és primer}\}$, Hadamard i Vallé Poussin al 1896 van provar independentment que $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$. En aquest cas doncs, $f_n \approx \frac{1}{\ln n}$ i per tant $\lim f_n = 0$ però la sèrie és divergent.

La sèrie harmònica

Per a què la sèrie convergeixi cal que $\lim f_n = 0$. És una condició necessària però no suficient.
Un exemple paradigmàtic és la suma dels inversos dels primers

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}.$$

Si denotem per $\pi(n) = \text{Card}\{i \leq n; i \text{ és primer}\}$, Hadamard i Vallé Poussin al 1896 van provar independentment que $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$. En aquest cas doncs, $f_n \approx \frac{1}{\ln n}$ i per tant $\lim f_n = 0$ però la sèrie és divergent.

De fet B.J. Powell a l'any 1980 va provar un fet més general.Si $f_n \approx \frac{C}{\ln n}$ amb $C > 0$ aleshores $\sum \frac{k_n}{n}$ és divergent.

La sèrie harmònica

La sèrie harmònica

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}.$$

La sèrie harmònica

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}.$$

La primera prova de la divergència d'aquesta sèrie és d' Euler. Després s'han publicat moltes altres proves d'aquest fet. En particular una d'elemental i preciosa de a F. Gilfeather i G. Meisters, que podeu trobar a l'article "Gemmes matemàtiques"de l'Armengol que està per aparèixer a Materials Matemàtics. Nosaltres obtindrem aquest resultat com a aplicació del Teorema que presento tot seguit.

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\text{lím}\, n a_n f_n = 0$.

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\text{lím}\, n a_n f_n = 0$. *A més si* $\text{lím}\, n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n f_n = 0$. *A més si* $\lim n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*
- $\liminf f_n \le \liminf \frac{S_n}{U_n} \le \limsup \frac{S_n}{U_n} \le \limsup f_n$.

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n f_n = 0$. *A més si* $\lim n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*
- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.*Així si* S_n *convergeix tindrem que* $\liminf f_n = 0$. *Tot i això hi ha exemples en que* S_n *és convergent però* $\lim f_n$ *no existeix.*

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n f_n = 0$. *A més si* $\lim n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*
- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.*Així si* S_n *convergeix tindrem que* $\liminf f_n = 0$. *Tot i això hi ha exemples en que* S_n *és convergent però* $\lim f_n$ *no existeix.Conseqüentment si* $\lim f_n = r$ *aleshores també* $\lim \frac{S_n}{U_n} = r$ *i si* $r \neq 0$ *tindrem que* $S_n \sim rU_n$.

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n f_n = 0$. *A més si* $\lim n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*
- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.*Així si* S_n *convergeix tindrem que* $\liminf f_n = 0$. *Tot i això hi ha exemples en que* S_n *és convergent però* $\lim f_n$ *no existeix.Conseqüentment si* $\lim f_n = r$ *aleshores també* $\lim \frac{S_n}{U_n} = r$ *i si* $r \neq 0$ *tindrem que* $S_n \sim r U_n$.
- *Per qualsevol* $l \geq 0$ *existeix una successió* $k_i \in \{0,1\}$ *amb* $\lim \sum_{i=1}^n k_i a_i = l$.

Teorema A

Teorema A *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{k_n\}$ *amb* $k_i \in \{0,1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}$, $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitats i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* S_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n f_n = 0$. *A més si* $\lim n a_n f_n = 0$ *aleshores* S_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1}) f_n$ *convergeix.*
- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.*Així si* S_n *convergeix tindrem que* $\liminf f_n = 0$. *Tot i això hi ha exemples en que* S_n *és convergent però* $\lim f_n$ *no existeix.Conseqüentment si* $\lim f_n = r$ *aleshores també* $\lim \frac{S_n}{U_n} = r$ *i si* $r \neq 0$ *tindrem que* $S_n \sim rU_n$.
- *Per qualsevol* $l \geq 0$ *existeix una successió* $k_i \in \{0,1\}$ *amb* $\lim \sum_{i=1}^n k_i a_i = l$.
- *Sigui* r_n *monòtona amb* $\lim r_n = \infty$ *i* $\lim \frac{r_n}{U_n} = 0$. *Suposem a més que* $\lim \frac{r_n - r_{n-1}}{a_n} = 0$. *Aleshores existeix una successió* $k_i \in \{0,1\}$ *de manera que la successió de sumes parcials associada satisfà* $S_n \sim r_n$ *i* $\liminf f_n = 0$.

Teorema A

Teorema A

Observem que el Teorema A dóna dues condicions necessàries per la convergència de S_n.

- $\lim na_nf_n = 0$. Aquesta condició quan $\liminf na_n > 0$ (cas de l'harmònica) implica que $\lim f_n = 0$. Ara bé quan $\lim na_n = 0$ aquesta condició no imposa cap condició sobre f_n.

Teorema A

Observem que el Teorema A dóna dues condicions necessàries per la convergència de S_n.

- $\lim n a_n f_n = 0$. Aquesta condició quan $\liminf n a_n > 0$ (cas de l'harmònica) implica que $\lim f_n = 0$. Ara bé quan $\lim n a_n = 0$ aquesta condició no imposa cap condició sobre f_n. El cas oposat $\lim n a_n = \infty$ imposa que f_n convergeix a zero més ràpidament que $\frac{1}{n a_n}$

Teorema A

Observem que el Teorema A dóna dues condicions necessàries per la convergència de S_n.

- $\lim na_n f_n = 0$. Aquesta condició quan $\liminf na_n > 0$ (cas de l'harmònica) implica que $\lim f_n = 0$. Ara bé quan $\lim na_n = 0$ aquesta condició no imposa cap condició sobre f_n. El cas oposat $\lim na_n = \infty$ imposa que f_n convergeix a zero més ràpidament que $\frac{1}{na_n}$
- $\liminf f_n = 0$.

Teorema A

Observem que el Teorema A dóna dues condicions necessàries per la convergència de S_n.

- $\lim na_n f_n = 0$. Aquesta condició quan $\liminf na_n > 0$ (cas de l'harmònica) implica que $\lim f_n = 0$. Ara bé quan $\lim na_n = 0$ aquesta condició no imposa cap condició sobre f_n. El cas oposat $\lim na_n = \infty$ imposa que f_n convergeix a zero més ràpidament que $\frac{1}{na_n}$
- $\liminf f_n = 0$. En particular si $\lim f_n$ existeix aleshores $\lim f_n = 0$.

Teorema A

Observem que el Teorema A dóna dues condicions necessàries per la convergència de S_n.

- $\lim na_nf_n = 0$. Aquesta condició quan $\liminf na_n > 0$ (cas de l'harmònica) implica que $\lim f_n = 0$. Ara bé quan $\lim na_n = 0$ aquesta condició no imposa cap condició sobre f_n. El cas oposat $\lim na_n = \infty$ imposa que f_n convergeix a zero més ràpidament que $\frac{1}{na_n}$
- $\liminf f_n = 0$. En particular si $\lim f_n$ existeix aleshores $\lim f_n = 0$.

Observem que també que la segona part del primer ítem dóna lloc a un criteri de comparació. Si tenim dues subsuccessions amb densitats f_n i f'_n i $f_n \leq f'_n$ aleshores de la convergència de la segona sèrie se'n dedueix la convergència de la primera.

Finalment l'últim ítem expressa rotundament que la condició $\liminf f_n = 0$ no és suficient per la convergència de la corresponent sèrie. De fet per "qualsevol" successió r_n que creixi "menys" que la total es poden trobar subsuccessions amb $\liminf f_n = 0$ i que la corresponent sèrie creix com r_n.

El Teorema A i $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$

El Teorema A i $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$

D'altra banda la divergència de la sèrie dels inversos dels primers s'obté del segon ítem del Teorema A. En efecte tindrem en aquest cas que la sèrie

$$n(a_n - a_{n+1})f_n \text{ es comporta com } n\frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{\ln n}$$

que és clarament divergent.

El Teorema A i $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$

D'altra banda la divergència de la sèrie dels inversos dels primers s'obté del segon ítem del Teorema A. En efecte tindrem en aquest cas que la sèrie

$$n(a_n - a_{n+1})f_n \text{ es comporta com } n\frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{\ln n}$$

que és clarament divergent.

De fet del Teorema A s'obté directament el Teorema de Powell ja que la sèrie $\sum n(\frac{1}{n} - \frac{1}{a_{n+1}})\frac{C}{\ln n}$ és divergent

El Teorema A i $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$

D'altra banda la divergència de la sèrie dels inversos dels primers s'obté del segon ítem del Teorema A. En efecte tindrem en aquest cas que la sèrie

$$n(a_n - a_{n+1})f_n \text{ es comporta com } n\frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{\ln n}$$

que és clarament divergent.

De fet del Teorema A s'obté directament el Teorema de Powell ja que la sèrie $\sum n(\frac{1}{n} - \frac{1}{a_{n+1}})\frac{C}{\ln n}$ és divergent

Corol.lari *La sèrie*

$$\sum_{p\geq 2 \text{ primer}} \frac{1}{p(\ln p)^{\alpha}(\ln\ln p)^{\beta}}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

és convergent si i només si o bé $\alpha > 0$ o bé $\alpha = 0$ i $\beta > 1$.

La prova del Teorema A. Mitjanes ponderades.

La prova del Teorema A. Mitjanes ponderades.

Teorema de Toeplitz sobre mitjanes ponderades

Sigui x_n una successió i $y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} x_i$ amb

- $c_{n,m} \geq 0$

La prova del Teorema A. Mitjanes ponderades.

Teorema de Toeplitz sobre mitjanes ponderades

Sigui x_n una successió i $y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} x_i$ amb

- $c_{n,m} \geq 0$
- $\lim \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$

La prova del Teorema A. Mitjanes ponderades.

Teorema de Toeplitz sobre mitjanes ponderades

Sigui x_n una successió i $y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} x_i$ amb

- $c_{n,m} \geq 0$
- $\lim \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$
- Fixat $m \in \mathbb{N}$ $\lim c_{n,m} = 0$.

La prova del Teorema A. Mitjanes ponderades.

Teorema de Toeplitz sobre mitjanes ponderades

Sigui x_n una successió i $y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} x_i$ amb

- $c_{n,m} \geq 0$
- $\lim \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$
- Fixat $m \in \mathbb{N}$ $\lim c_{n,m} = 0$.

Aleshores

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \leq \limsup y_n \leq \limsup x_n.$$

En particular si $\lim x_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ llavors $\lim y_n = l$.

Corol.lari: Criteri de Stolz

Sigui $\frac{a_n}{b_n}$ *una successió de nombres reals amb* $b_n \nearrow \infty$. *Tindrem:*

$$\liminf \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Corol.lari: Criteri de Stolz

Sigui $\frac{a_n}{b_n}$ *una successió de nombres reals amb* $b_n \nearrow \infty$. *Tindrem:*

$$\liminf \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \le \liminf \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

En particular, si la successió $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ *convergeix a* $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *el mateix passa per* $\frac{a_n}{b_n}$.

Corol.lari: Criteri de Stolz

Sigui $\frac{a_n}{b_n}$ *una successió de nombres reals amb* $b_n \nearrow \infty$. *Tindrem:*

$$\liminf \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

En particular, si la successió $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ *convergeix a* $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *el mateix passa per* $\frac{a_n}{b_n}$.

Corol.lari: Criteri de Stolz

Prova Només cal aplicar el teorema de Toeplitz a

$$x_n = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, & \text{if } n = 1, \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} & \text{si } n > 1, \end{cases} \quad \text{with} \quad c_{n,i} = \begin{cases} \frac{b_1}{b_n}, & \text{if } i = 1, \\ \frac{b_i - b_{i-1}}{b_n}, & \text{if } 1 < i \leq n, \\ 0, & \text{if } i > n, \end{cases}$$

ja que amb aquesta elecció de pesos

$$y_n = \frac{b_1}{b_n}\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2 - b_1}{b_n}\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

Corol.lari: Criteri de Stolz

Prova Només cal aplicar el teorema de Toeplitz a

$$x_n = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, & \text{if } n = 1, \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} & \text{si } n > 1, \end{cases} \quad \text{with} \quad c_{n,i} = \begin{cases} \frac{b_1}{b_n}, & \text{if } i = 1, \\ \frac{b_i - b_{i-1}}{b_n}, & \text{if } 1 < i \leq n, \\ 0, & \text{if } i > n, \end{cases}$$

ja que amb aquesta elecció de pesos

$$y_n = \frac{b_1}{b_n}\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2 - b_1}{b_n}\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

$\text{lím}_n \frac{b_i - b_{i-1}}{b_n} = 0$

Corol.lari: Criteri de Stolz

Prova Només cal aplicar el teorema de Toeplitz a

$$x_n = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1}, & \text{if } n = 1, \\ \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} & \text{si } n > 1, \end{cases} \quad \text{with} \quad c_{n,i} = \begin{cases} \frac{b_1}{b_n}, & \text{if } i = 1, \\ \frac{b_i - b_{i-1}}{b_n}, & \text{if } 1 < i \leq n, \\ 0, & \text{if } i > n, \end{cases}$$

ja que amb aquesta elecció de pesos

$$y_n = \frac{b_1}{b_n}\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2 - b_1}{b_n}\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$$

$\text{lím}_n \frac{b_i - b_{i-1}}{b_n} = 0$ i

$$\frac{b_1}{b_n} + \frac{b_2 - b_1}{b_n} + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_n}{b_n} = 1$$

Prova del Teorema de Toeplitz

Prova del Teorema de Toeplitz

La prova descansa en dues observacions molt simples

- Si $x_n \in [A, B]$ per tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores com que $c_{n,i} \geq 0$ tindrem

$$y_n \in \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\Big)A, \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\Big)B\Big]$$

  per tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, com que $\text{lím} \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$, qualsevol punt d'acumulació de y_n pertany a $[A, B]$.

Prova del Teorema de Toeplitz

La prova descansa en dues observacions molt simples

- Si $x_n \in [A, B]$ per tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores com que $c_{n,i} \geq 0$ tindrem

$$y_n \in \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\Big)A, \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\Big)B\Big]$$

  per tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, com que $\lim \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$, qualsevol punt d'acumulació de y_n pertany a $[A, B]$.
- Si canviem un nombre finit de termes de la successió x_n, obtenint una nova successió x_n', aleshores el conjunt de punts d'acumulació de la corresponent successió de mitjanes y_n' no canvia. Això és degut al fet que, fixat r, al canviar x_r per x_r' la corresponent successió y_n' satisfà $y_n' = y_n + c_{n,r}(x_r' - x_r)$ i com que $\lim c_{n,r} = 0$, les successions y_n i y_n' comparteixen els mateixos punts d'acumulació.

Prova del Teorema de Toeplitz

La prova descansa en dues observacions molt simples

- Si $x_n \in [A, B]$ per tot $n \in \mathbb{N}$, aleshores com que $c_{n,i} \geq 0$ tindrem
$$y_n \in \Big[\big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\big)A, \big(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\big)B\Big]$$
per tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, com que $\lim \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 1$, qualsevol punt d'acumulació de y_n pertany a $[A, B]$.
- Si canviem un nombre finit de termes de la successió x_n, obtenint una nova successió x'_n, aleshores el conjunt de punts d'acumulació de la corresponent successió de mitjanes y'_n no canvia. Això és degut al fet que, fixat r, al canviar x_r per x'_r la corresponent successió y'_n satisfà $y'_n = y_n + c_{n,r}(x'_r - x_r)$ i com que $\lim c_{n,r} = 0$, les successions y_n i y'_n comparteixen els mateixos punts d'acumulació.

Prova del Teorema de Toeplitz (2)

Prova del Teorema de Toeplitz (2)

Sigui z un punt d'acumulació de y_n i sigui $\epsilon > 0$. La successió x_n té només un nombre finit de termes fora del interval $[\liminf x_n - \epsilon, \limsup x_n + \epsilon]$. Construïm una nova successió x_n' canviant els termes de fora de $[\liminf x_n - \epsilon, \limsup x_n + \epsilon]$ per $\liminf x_n$ per exemple. Per la segona observació, z és encara un punt d'acumulació de la successió y_n' i per la primera observació $z \in [\liminf x_n - \epsilon, \limsup x_n + \epsilon]$. Això acaba la demostració.

Idea de la prova del Teorema A

- Com que $S_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ tindrem per $i \geq 2$, $k_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i}$ i per tant

$$f_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i} + \frac{S_1}{a_1}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{S_n}{a_n} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i}\right) S_i\right]$$

Idea de la prova del Teorema A

- Com que $S_n = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$ tindrem per $i \geq 2$, $k_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i}$ i per tant

$$f_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i} + \frac{S_1}{a_1}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{S_n}{a_n} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i}\right) S_i\right]$$

Per tant

$$n a_n f_n = S_n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}\right) S_i$$

Idea de la prova del Teorema A

- Com que $S_n = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$ tindrem per $i \geq 2$, $k_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i}$ i per tant

$$f_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{S_i - S_{i-1}}{a_i} + \frac{S_1}{a_1}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{S_n}{a_n} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i}\right) S_i\right]$$

Per tant

$$n a_n f_n = S_n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}\right) S_i$$

Idea de la prova del Teorema A

- $na_n f_n = S_n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}\right) S_i$
- Posant

$$c_{n,i} = \begin{cases} \frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}, & \text{if } i < n, \\ 0, & \text{si } i \geq n, \end{cases}$$

veiem que estem en les condicions del Teorema de Toeplitz ja que

- $\text{lím}_n \frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} = 0$

Idea de la prova del Teorema A

- $na_nf_n = S_n - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}\right)S_i$
- Posant

$$c_{n,i} = \begin{cases} \frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i}, & \text{if } i < n, \\ 0, & \text{si } i \geq n, \end{cases}$$

veiem que estem en les condicions del Teorema de Toeplitz ja que

- $\text{lím}_n \frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} = 0$
- $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} = 1 - \frac{a_n}{a_1}$.

Per tant si S_n convergeix el terme dret de l'anterior igualtat tendeix a zero. Això prova la primera part del primer ítem.

Idea de la prova del Teorema A (2)

- Alternativament també tenim per $i \geq 2$, $k_i = if_i - (i-1)f_{i-1}$. Podem escriure doncs,

$$S_n = \sum_{i=2}^{n}(if_i - if_{i-1})a_i + f_1 a_1 = na_n f_n + \sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})f_i$$

Idea de la prova del Teorema A (2)

- Alternativament també tenim per $i \geq 2$, $k_i = if_i - (i-1)f_{i-1}$. Podem escriure doncs,

$$S_n = \sum_{i=2}^{n}(if_i - if_{i-1})a_i + f_1 a_1 = na_n f_n + \sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})f_i$$

  Tenim doncs que quan lím $na_n f_n = 0$ la convergència de S_n és equivalent a la convergència de $\sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})f_i$. Això finalitza la prova del primer ítem.

- Per provar el segon ítem n'hi ha prou amb dividir l'anterior equació per U_n i obtenim

$$\frac{S_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n} f_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} f_i.$$

Idea de la prova del Teorema A (2)

- Alternativament també tenim per $i \geq 2,\ k_i = if_i - (i-1)f_{i-1}$. Podem escriure doncs,

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} (if_i - if_{i-1})a_i + f_1 a_1 = na_n f_n + \sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})f_i$$

  Tenim doncs que quan $\lim na_n f_n = 0$ la convergència de S_n és equivalent a la convergència de $\sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})f_i$. Això finalitza la prova del primer ítem.

- Per provar el segon ítem n'hi ha prou amb dividir l'anterior equació per U_n i obtenim

$$\frac{S_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n} f_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} f_i.$$

Idea de la prova del Teorema A (2)

$$\frac{S_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n} f_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} f_i.$$

Posant ara

$$c_{n,i} = \begin{cases} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n}, & \text{if } i < n, \\ \frac{na_n}{U_n}, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{if } i > n. \end{cases}$$

Tindrem

- $\text{lím}_n \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} = 0.$

Idea de la prova del Teorema A (2)

$$\frac{S_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n} f_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} f_i.$$

Posant ara

$$c_{n,i} = \begin{cases} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n}, & \text{if } i < n, \\ \frac{na_n}{U_n}, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{if } i > n. \end{cases}$$

Tindrem

- $\text{lím}_n \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} = 0.$
- $\frac{na_n}{U_n} + \frac{(n-1)(a_{n-1} - a_n)}{U_n} + \dots \frac{(a_1 - a_2)}{U_n} = \frac{a_n + \dots + a_1}{U_n} = 1$

Idea de la prova del Teorema A (2)

$$\frac{S_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n} f_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} f_i.$$

Posant ara

$$c_{n,i} = \begin{cases} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n}, & \text{if } i < n, \\ \frac{na_n}{U_n}, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{if } i > n. \end{cases}$$

Tindrem

- $\text{lím}_n \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n} = 0.$
- $\frac{na_n}{U_n} + \frac{(n-1)(a_{n-1} - a_n)}{U_n} + \dots \frac{(a_1 - a_2)}{U_n} = \frac{a_n + \dots + a_1}{U_n} = 1$
- Pel Teorema de Toeplitz la successió $\frac{S_n}{U_n}$ té el seus punts d'acumulaciò a l'interval $[\text{lím inf } f_n, \text{lím sup } f_n]$

Idea de la prova del Teorema A (2)

- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n.$

Idea de la prova del Teorema A (2)

- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.
- Així si S_n és convergent tindrem $\liminf f_n = 0$.

Idea de la prova del Teorema A (2)

- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.
- Així si S_n és convergent tindrem $\liminf f_n = 0$.
- Si $\lim f_n = r > 0$ aleshores $S_n \sim rU_n$.

Idea de la prova del Teorema A (2)

- $\liminf f_n \leq \liminf \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup \frac{S_n}{U_n} \leq \limsup f_n$.
- Així si S_n és convergent tindrem $\liminf f_n = 0$.
- Si $\lim f_n = r > 0$ aleshores $S_n \sim rU_n$.
- Com veurem tot seguit hi ha exemples amb S_n convergent i per tant amb $\liminf f_n = 0$ però f_n no és convergent.

Idea de la prova del Teorema A (3): L'exemple

Sigui $b_n = \frac{1}{m^{m+2}}$ sempre que $n \in [m^m, (m+1)^{m+1})$.

Idea de la prova del Teorema A (3): L'exemple

Sigui $b_n = \frac{1}{m^{m+2}}$ sempre que $n \in [m^m, (m+1)^{m+1})$. Tindrem

$$\sum_{i=m^m}^{(m+1)^{m+1}-1} b_i = \left((m+1)^{m+1} - m^m\right)\frac{1}{m^{m+2}} > \frac{m^{m+1}}{m^{m+2}} = \frac{1}{m}$$

i per tant $\sum b_n = \infty$.

Idea de la prova del Teorema A (3): L'exemple

Sigui $b_n = \frac{1}{m^{m+2}}$ sempre que $n \in [m^m, (m+1)^{m+1})$.Tindrem

$$\sum_{i=m^m}^{(m+1)^{m+1}-1} b_i = \left((m+1)^{m+1} - m^m\right)\frac{1}{m^{m+2}} > \frac{m^{m+1}}{m^{m+2}} = \frac{1}{m}$$

i per tant $\sum b_n = \infty$. Escollim ara la subsuccessió amb

$$k_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in [m^m, 2m^m) \text{ per algún } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{en qualsevol altre cas,} \end{cases}$$

Idea de la prova del Teorema A (3): L'exemple

Sigui $b_n = \frac{1}{m^{m+2}}$ sempre que $n \in [m^m, (m+1)^{m+1})$.Tindrem

$$\sum_{i=m^m}^{(m+1)^{m+1}-1} b_i = \left((m+1)^{m+1} - m^m\right)\frac{1}{m^{m+2}} > \frac{m^{m+1}}{m^{m+2}} = \frac{1}{m}$$

i per tant $\sum b_n = \infty$. Escollim ara la subsuccessió amb

$$k_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in [m^m, 2m^m) \text{ per algún } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{en qualsevol altre cas,} \end{cases}$$

Tindrem

$$\sum_{i=m^m}^{(m+1)^{m+1}-1} k_i b_i = \sum_{i=m^m}^{2m^m-1} b_i = \frac{m^m}{m^{m+2}} = \frac{1}{m^2}.$$

Per tant $\sum k_n b_n$ és convergent

Idea de la prova del Teorema A (4): L'exemple

Observem però que $f_{2m^m} \geq \frac{1}{2}$, i per tant $\limsup f_n \geq \frac{1}{2}$.

Idea de la prova del Teorema A (4): L'exemple

Observem però que $f_{2m^m} \geq \frac{1}{2}$, i per tant $\limsup f_n \geq \frac{1}{2}$.
Per obtenir l'exemple ara només cal considerar $a_n = b_n + \frac{1}{n^2}$ successió estrictament monótona que comparteix les propietats desitjades amb a_n.

Sèries amb signe, Teorema B

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$.

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*
- $\liminf (2f_n - 1) \leq \liminf \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup (2f_n - 1)$.

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\text{lím}\, n a_n(2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\text{lím}\, n a_n(2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*
- $\text{lím inf}(2f_n - 1) \leq \text{lím inf}\, \frac{T_n}{U_n} \leq \text{lím sup}\, \frac{T_n}{U_n} \leq \text{lím sup}(2f_n - 1)$. *Així si* T_n *convergeix tindrem que* $1/2 \in [\text{lím inf}\, f_n, \text{lím sup}\, f_n]$.

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\text{lím}\, n a_n(2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\text{lím}\, n a_n(2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*
- $\text{lím inf}(2f_n - 1) \leq \text{lím inf}\, \frac{T_n}{U_n} \leq \text{lím sup}\, \frac{T_n}{U_n} \leq \text{lím sup}(2f_n - 1)$.*Així si* T_n *convergeix tindrem que* $1/2 \in [\text{lím inf}\, f_n, \text{lím sup}\, f_n]$. *Conseqüentment si* $\text{lím}\, f_n = r$ *aleshores* $\text{lím}\, \frac{T_n}{U_n} = 2r - 1$ *i si* $r \neq 1/2$ *tindrem que* $T_n \sim (2r - 1)U_n$.

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*
- $\liminf(2f_n - 1) \leq \liminf \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup(2f_n - 1)$.*Així si* T_n *convergeix tindrem que* $1/2 \in [\liminf f_n, \limsup f_n]$. *Conseqüentment si* $\lim f_n = r$ *aleshores* $\lim \frac{T_n}{U_n} = 2r - 1$ *i si* $r \neq 1/2$ *tindrem que* $T_n \sim (2r-1)U_n$.
- *Per qualsevol* $l \in \mathbb{R}$ *existeix una successió* $j_i \in \{-1, 1\}$ *amb* $\lim \sum_{i=1}^n j_i a_i = l$.

Sèries amb signe, Teorema B

Theorema B *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda sigui* $\{j_n\}$ *amb* $j_i \in \{-1, 1\}$ *i* $f_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1+j_i}{2}}{n}$, $T_n = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ *les succesions de densitat de 1's i sumes parcials associades. Llavors les següents afirmacions són certes:*

- *Si* T_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$. *A més si* $\lim n a_n (2f_n - 1) = 0$ *aleshores* T_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(2f_n - 1)$ *convergeix.*
- $\liminf (2f_n - 1) \leq \liminf \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup \frac{T_n}{U_n} \leq \limsup (2f_n - 1)$.*Així si* T_n *convergeix tindrem que* $1/2 \in [\liminf f_n, \limsup f_n]$. *Conseqüentment si* $\lim f_n = r$ *aleshores* $\lim \frac{T_n}{U_n} = 2r - 1$ *i si* $r \neq 1/2$ *tindrem que* $T_n \sim (2r - 1) U_n$.
- *Per qualsevol* $l \in \mathbb{R}$ *existeix una successió* $j_i \in \{-1, 1\}$ *amb* $\lim \sum_{i=1}^n j_i a_i = l$.

Sèries amb signe, Teorema B

Sèries amb signe, Teorema B

- *Sigui* r_n *monòtona amb* $\text{lím}\, r_n = \infty$ *i* $\text{lím}\, \frac{r_n}{U_n} = 0$. *Suposem a més que* $\text{lím}\, \frac{r_n - r_{n-1}}{a_{n+1}} = 0$. *Llavors existeix una successió* $j_i \in \{-1, 1\}$ *de manera que la successió de sumes parcials associada satisfà* $T_n \sim r_n$ *i* $1/2 \in [\text{lím inf}\, f_n, \text{lím sup}\, f_n]$.

Teorema B, prova

Teorema B, prova

- La prova del primer ítem funciona de la mateixa manera que en el cas del Teorema A. Cal posar T_n en funció de la densitat f_n Càlculs similars als desenvolupats a la prova del teorema anterior donen

$$na_n(2f_n - 1) = T_n - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} \right) T_i$$

Teorema B, prova

- La prova del primer ítem funciona de la mateixa manera que en el cas del Teorema A. Cal posar T_n en funció de la densitat f_n Càlculs similars als desenvolupats a la prova del teorema anterior donen

$$na_n(2f_n - 1) = T_n - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} \right) T_i$$

i

$$T_n = na_n(2f_n - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})(2f_i - 1)$$

Teorema B, prova

- La prova del primer ítem funciona de la mateixa manera que en el cas del Teorema A. Cal posar T_n en funció de la densitat f_n Càlculs similars als desenvolupats a la prova del teorema anterior donen

$$na_n(2f_n - 1) = T_n - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_n}{a_{i+1}} - \frac{a_n}{a_i} \right) T_i$$

i

$$T_n = na_n(2f_n - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} i(a_i - a_{i+1})(2f_i - 1)$$

- Per provar el segon item dividim la segona igualtat per U_n i obtenim:

$$\frac{T_n}{U_n} = \frac{na_n}{U_n}(2f_n - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(a_i - a_{i+1})}{U_n}(2f_i - 1)$$

Teorema C

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^n m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (f_n - g_n) = 0$.

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$*. D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\lim na_n(f_n - g_n) = 0$*. A més si* $\lim na_n(f_n - g_n) = 0$ *llavors* P_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(f_n - g_n)$ *convergeix.*

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\text{lím}\, a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\text{lím}\, n a_n (f_n - g_n) = 0$. *A més si* $\text{lím}\, n a_n (f_n - g_n) = 0$ *llavors* P_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(f_n - g_n)$ *convergeix.*
- $\text{lím inf}(f_n - g_n) \leq \text{lím inf}\, \frac{P_n}{U_n} \leq \text{lím sup}\, \frac{P_n}{U_n} \leq \text{lím sup}(f_n - g_n)$.

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^n m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n(f_n - g_n) = 0$. *A més si* $\lim n a_n(f_n - g_n) = 0$ *llavors* P_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(f_n - g_n)$ *convergeix.*
- $\liminf(f_n - g_n) \leq \liminf \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup(f_n - g_n)$.*Així si* P_n *convergeix tindrem que* $0 \in [\liminf f_n - g_n, \limsup f_n - g_n]$.

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^n m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\lim n a_n (f_n - g_n) = 0$. *A més si* $\lim n a_n (f_n - g_n) = 0$ *llavors* P_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(f_n - g_n)$ *convergeix.*
- $\liminf (f_n - g_n) \leq \liminf \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup (f_n - g_n)$.*Així si* P_n *convergeix tindrem que* $0 \in [\liminf f_n - g_n, \limsup f_n - g_n]$. *Conseqüentment si* $\lim f_n - g_n = r$ *aleshores* $\lim \frac{P_n}{U_n} = r$ *i si* $r \neq 0$ *tindrem que* $P_n \sim r U_n$.

Teorema C

Teorema C *Sigui* $\{a_n\}$ *una successió positiva i monòtona amb* $\lim a_n = 0$ *i* $\sum a_i = \infty$ *i sigui* $U_n = \sum_{i=1}^n a_i$. *D'altra banda siguin* $\{m_n\}$ *amb* $m_i \in \{-1, 1, 0\}$ *i* f_n, g_n *les successions associades de densitats de 1's i -1's respectivament. Considerem* $P_n = \sum_{i=1}^n m_i a_i$ *la corresponent successió de sumes parcials.*

- *Si* P_n *és convergent, aleshores* $\lim na_n(f_n - g_n) = 0$. *A més si* $\lim na_n(f_n - g_n) = 0$ *llavors* P_n *convergeix si i només si* $\sum n(a_n - a_{n+1})(f_n - g_n)$ *convergeix.*
- $\liminf(f_n - g_n) \leq \liminf \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup \frac{P_n}{U_n} \leq \limsup(f_n - g_n)$.*Així si* P_n *convergeix tindrem que* $0 \in [\liminf f_n - g_n, \limsup f_n - g_n]$. *Conseqüentment si* $\lim f_n - g_n = r$ *aleshores* $\lim \frac{P_n}{U_n} = r$ *i si* $r \neq 0$ *tindrem que* $P_n \sim rU_n$.

El cas aleatori

Suposem ara una variable aleatoria discreta W , amb la següent distribució $P\{W = 1\} = p,\ P\{W = -1\} = q$ i $P\{W = 0\} = 1 - p - q$ amb $p - q > 0$. Denotem aquesta distribució per $W(p, q)$.

El cas aleatori

Suposem ara una variable aleatoria discreta W , amb la següent distribució $P\{W = 1\} = p,\ P\{W = -1\} = q$ i $P\{W = 0\} = 1 - p - q$ amb $p - q > 0$. Denotem aquesta distribució per $W(p, q)$.

Estem interessats en estudiar la convergència de la sèrie aleatoria $\sum a_n W_n$ on W_n son variables aleatòries independents idènticament distribuïdes amb distribució $W(p, q)$.

Aquest estudi es pot fer aplicant el Teorema de les tres sèries de Kolmogorov, que determina el caràcter d'una sèrie aleatòria a partir de tres sèries deterministes.

Theorema (Kolmogorov)*Sigui* X_n *una successió de variables aleatòries independents. La sèrie* $\sum X_n$ *is a.s. convergent si i només si, per algún* $A > 0$*, es satisfan les següents tres condicions :*

(a) $\sum P\big(|X_n| \geq A\big)$ *és convergent,*

(b) *Si denotem* $Y_n = X_n \cdot 1_{\{|X_n| \leq A\}}$*, aleshores* $\sum E(Y_n)$*, la sèrie de les esperances de* Y_n*, és convergent,*

(c) $\sum \mathrm{Var}(Y_n)$ *és convergent.*

El cas aleatori. Teorema D

Teorema D *Considerem la sèrie aleatoria* $Z = \sum a_n W_n$, *on* W_n *és una successió de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes , amb distribució* $\mathcal{W}(p, q)$. *Suposem que* a_n *és una successió positiva, amb* $\lim a_n = 0$ *i tal que* $\sum a_n = \infty$. *Aleshores* Z *convergeix a.s. si i només si* $p = q$ *i* $\sum a_n^2$ *és convergent. Si no és així* Z *és divergent a.s.*

El cas aleatori. Teorema D

Teorema D *Considerem la sèrie aleatoria* $Z = \sum a_n W_n$, *on* W_n *és una successió de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes , amb distribució* $\mathcal{W}(p, q)$. *Suposem que* a_n *és una successió positiva, amb* $\lim a_n = 0$ *i tal que* $\sum a_n = \infty$. *Aleshores* Z *convergeix a.s. si i només si* $p = q$ *i* $\sum a_n^2$ *és convergent. Si no és així* Z *és divergent a.s.*

- $\sum P\big(|a_n W_n| \geq A\big) = 0$ per qualsevol $A > 0$ i n prou gran.

El cas aleatori. Teorema D

Teorema D *Considerem la sèrie aleatoria* $Z = \sum a_n W_n$, *on* W_n *és una successió de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes , amb distribució* $\mathcal{W}(p, q)$. *Suposem que* a_n *és una successió positiva, amb* $\lim a_n = 0$ *i tal que* $\sum a_n = \infty$. *Aleshores* Z *convergeix a.s. si i només si* $p = q$ *i* $\sum a_n^2$ *és convergent. Si no és així* Z *és divergent a.s.*

- $\sum P\big(|a_n W_n| \geq A\big)=0$ per qualsevol $A > 0$ i n prou gran.
- Si denotem $Y_n = a_n W_n \cdot 1_{\{|a_n W_n| \leq A\}}$ aleshores per n prou gran $Y_n = a_n X_n$, i $E(Y_n) = (p - q)a_n$. Per tant $\sum E(Y_n)$ és convergent si i només $p = q$.
- Quan $p = q$, tindrem per n prou gran $Var(Y_n) = Var(a_n W_n) = a_n^2 2p$.
- La segona afirmació és conseqüència del següent teorema, degut també a Kolgomorov.

Theorema *Sigui* X_n *una successió de variables aleatòries independents. Aleshores, la sèrie aleatòria* $\sum X_n$ *és o bé convergent a.s. o bé divergent a.s.*

El cas aleatori

Fent servir els nostres resultats (Teorema C) i la llei del logaritme iterat que quantifia la velocitat de convergència cap al valor esperat obtenim un resultat un xic més dèbil que el Teorema D

Llei del Logaritme iterat *Sigui X_n una successió de variables aleatòries idènticament distribuïdes amb $E(X_1^2) < \infty$. Aleshores*

$$\liminf \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{2n \ln \ln n}} = -1 \quad (a.s.) \quad i \quad \limsup \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{2n \ln \ln n}} = +1 \quad (a.s.),$$

on $E(X_1) = \mu$ *i* $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$.

El cas aleatori

Lema *Sigui W_n una successió de variables aleatòries idènticament distribuïdes amb distribució $\mathcal{W}(p,q)$, i sigui F_n (resp. G_n) les variables aleatories que donen la densitat de 1's (resp. -1's) de la successió. Aleshores*

$$\liminf \frac{\sqrt{n}\,\left(F_n - G_n - (p-q)\right)}{\sqrt{\ln \ln n}} = -L \ (a.s.)$$

i

$$\limsup \frac{\sqrt{n}\,\left(F_n - G_n - (p-q)\right)}{\sqrt{\ln \ln n}} = L \ (a.s.),$$

on $L = \sqrt{2(p+q-(p-q)^2)}$. En particular, per gairebé tot ω, existeix $K(\omega) > L$ de manera que

$$\left|F_n(\omega) - G_n(\omega) - (p-q)\right| \leq K(\omega)\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}.$$

El cas aleatori

Corol.lari *Sigui a_n una successió positiva que tendeix monòtonament a 0 i tal que $\sum a_n = \infty$. Considerem la sèrie aleatòria $Z = \sum a_n W_n$, on W_n són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes amb distribució $\mathcal{W}(p, q)$. Tindrem*

(I) *Si $p \neq q$ aleshores Z divergeix a.s.*

(II) *Si $p = q$ i $a_n \geq \frac{R}{\sqrt{n \ln \ln n}}$, per $n \geq n_0$ i algún $R > 0$, aleshores Z és divergent a.s.*

(III) *Si $p = q$ i $\sum \sqrt{n \ln \ln n}\left(a_n - a_{n+1}\right)$ convergeix aleshores Z convergeix a.s.*

Acabo la xerrada comparant els resultats d'aplicar el Teorema de Kolmogorov i aquest últim Corol.lari a una familia de sèries aleatòries.

$$W^{\alpha,\beta} = \sum \frac{W_n}{n^\alpha \ln^\beta n}, \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0,$$

on W_n són variables aleatòries i.i.d. amb distribució $\mathcal{W}(p,q)$.

	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$	a.s. div.	a.s. div. $(*)$	a.s. conv.	a.s. conv.	conv.
$\frac{1}{2} < \beta \leq 1$	a.s. div.	a.s. conv. $(*)$	a.s. conv.	a.s. conv.	conv.
$\beta > 1$	a.s. div.	a.s. conv.	a.s. conv.	conv.	conv.

Cuadro: Comportament de la sèrie aleatòria $W^{\alpha,\beta}$, amb $p = q$, segons els valors de α i β. Casos amb $(*)$ els detecta el Teorema de Kolmogorov però no la nostra aproximació.

GRÀCIES A TOTS PER LA VOSTRA ATENCIÓ!!